Espacios Moduli de Conexiones Planas en G-fibrados Principales

César Leandro Higuita Pérez

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2018

Espacios Moduli de Conexiones Planas en G-fibrados Principales

César Leandro Higuita Pérez

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Ciencias-Matemáticas

Director:
Ph.D. José Manuel Gómez Guerra

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Medellín, Colombia
2018

"Young man, in mathematics you do not understand things. You just get used to them." *John Von Neumann*

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres y a mi esposa María Alejandra Suaza por ser el más grande apoyo durante todo este proceso formativo.

Académicamente, quiero agradecer a toda la planta docente de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín por inculcar día a día el amor por esta bella ciencia y ejercer su labor con tanto empeño.

A mi asesor, doctor José Manuel Gómez Guerra, quien con sus conocimientos, su paciencia, su disciplina, su motivación se convirtió en una persona fundamental durante estos dos años que he tenido el privilegio de recibir sus enseñanzas. También le agradezco por todo el tiempo, incluso fuera de su horario laboral, que ha dedicado no sólo a este trabajo, sino a cualquier situación en la que yo pudiera necesitar de su ayuda.

Contenido

Introducción

Los espacios moduli de conexiones planas surgen en diferentes áreas. Por ejemplo en física, estos espacios aparecen al estudiar las ecuaciones de $Yang$-$Mills$, que son una generalización de las ecuaciones de $Maxwell$ del electromagnetismo, en una variedad suave de dimensión 2. Las conexiones en un G-fibrado principal $P \to M$ nos indican una manera explícita de hacer transporte paralelo sobre P. Es así como actualmente muchos tópicos de investigación en *teoría cuántica de campos* están relacionados con dichos espacios.

En este trabajo estamos interesados en estudiar estos espacios moduli desde un punto de vista meramente topológico, como se describe a continuación:

Dado un G-fibrado principal $\pi : P \to M$, una conexión en P es un subfibrado H de TP tal que para todo $p \in P$, $T_pP = H_p \oplus ker(d\pi_p)$ y $H_{pg} = dR_g(H_p)$ y a esta conexión le podemos asociar de manera única una 1-forma θ en P con valores en $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie de G. Ahora, la 2-forma $F_\theta := d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$ es llamada la curvatura de θ, y decimos que H es una conexión plana si su curvatura es trivial, es decir, si $F_\theta = 0$.

Por otra parte, si $\pi_1 : P \to M$ y $\pi_2 : Q \to M$ son G-fibrados principales sobre M, con conexiones H^1 y H^2 respectivamente, decimos que estos fibrados son *gauge equivalentes* si existe una función suave $f : P \to Q$ que es G-equivariante tal que $\pi_2 \circ f = \pi_1$ y $df_p(H^1_p) = H^2_{f(p)}$ para todo $p \in P$.

Lo anterior nos permite definir el *Espacio Moduli de Conexiones Planas en G-fibrados Principales* que será nuestro principal objeto de estudio en esta tesis de la siguiente manera.

De manera informal el espacio moduli de conexiones planas en G-fibrados principales sobre una variedad M, es un espacio que parametriza todas las clases gauge de conexiones planas en fibrados sobre M.

De manera formal, dado un grupo de Lie G y una variedad suave y conexa M, definimos el espacio moduli de conexiones planas en G-fibrados principales sobre M, denotado por $\mathcal{M}(M, G)$ como

$$\mathcal{M}(M, G) = \frac{\bigsqcup (P, H)}{\sim},$$

donde P es un G-fibrado principal sobre M, H es una conexión pĺana en P y $\sim$ es la relación de equivalencia gauge de fibrados principales.

El primer objetivo principal de esta tesis es identificar el espacio moduli $\mathcal{M}(M,G)$ con el espacio de representaciones $Rep(\pi_1(M),G) = Hom(\pi_1(M),G)/G^{conj}$, donde G actúa por conjugación.

Este trabajo está dividido de la soguiente manera. En el primer capítulo exploramos algunas definiciones básicas como lo son los fibrados principales, las conexiones y la curvatura.

En el segundo capítulo identificamos el espacio moduli $\mathcal{M}(M,G)$ con el espacio de representaciones $Rep(\pi_1(M),G)$.

En el tercer capítulo exploramos los espacios de representaciones y consideramos algunos ejemplos. En particular determinamos el espacio moduli $\mathcal{M}(M,G)$ para todas las variedades compactas con grupo fundamental abeliano y para $G = U(n)$ y $G = Sp(n)$. Esta última parte es una nueva contribución de este trabajo.

Capítulo 1

G-fibrados principales y conexiones planas

En este capítulo estudiaremos los objetos que nos permitirán luego definir el espacio moduli. Comenzaremos con las definiciones de G-fibrados principales y conexiones, para luego definir los grupos de holonomía. Por último estudiaremos la curvatura y las conexiones planas.

1.1. G-fibrados principales

Definición 1. Sea G un grupo de Lie y M una variedad suave. Un G-fibrado principal sobre M es una variedad suave P junto con una función suave y sobreyectiva $\pi : P \to M$ que satisface las siguientes condiciones:

(a) G actúa libremente en P a la derecha y $\pi : P \to M$ es G-invariante.

(b) El mapeo inducido $\tilde{\pi} : P/G \to M$ es un difeomorfismo.

(c) P es localmente trivial, es decir, para cada $x \in M$ existe una vecindad de x $U \subset M$, y un difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi\,|_{\pi^{-1}(U)}"'] & & U \times G \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

y ψ es G-equivariante, es decir, para todo $p \in \pi^{-1}(U)$ y $g \in G$, $\psi(pg) = \psi(p)g$.

Aquí π_1 es la proyección sobre U.

Nota 1. Durante este trabajo G será un grupo de Lie, P y M serán variedades suaves y $\pi : P \to M$ un G-fibrado principal, a menos que se especifique lo contrario.

Notemos que el mapeo π es una submersión sobreyectiva por la trivialidad local, por lo tanto si $x \in M$, $P_x := \pi^{-1}(x)$ es una subvariedad de P tal que $dim(P) = dim(P_x) + dim(M)$, y además si $\pi(p) = x$ se tiene que

$$T_p P_x = ker(d\pi_p : T_p \to T_x M).$$

Como $M \cong P/G$ y G actúa libremente por la derecha en P, entonces podemos identificar a G con las fibras de π. De manera más precisa, si fijamos $p \in P$ y $x = \pi(p)$, entonces la función

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to P_x \\ g &\mapsto pg \end{aligned}$$

es un difeomorfismo.

Ejemplo 1.1. *Si M es una variedad suave y G un grupo de Lie, consideremos el G-fibrado principal sobre M dado por*

$$\begin{aligned} \pi : M \times G &\to M \\ (m, g) &\mapsto m \end{aligned}$$

donde la acción de G en $M \times G$ está definida como $(m, g) \cdot h = (m, gh)$. Este es llamado el G-fibrado principal trivial sobre M.

Ejemplo 1.2. *Sean M una variedad suave y arco-conexa, $\pi : \widetilde{M} \to M$ la cubierta universal y $\pi_1(M)$ el grupo fundamental de M. Entonces $\pi : \widetilde{M} \to M$ es un $\pi_1(M)$-fibrado principal donde $\pi_1(M)$ actúa en $\widetilde{M}$ vía transformaciones de deck, denotadas por $Aut(\widetilde{M})$.*

Notemos que la acción de las transformaciones de deck sobre M está definida a la izquierda. Definimos la acción a derecha de $Aut(\widetilde{M})$ en $\widetilde{M}$ como

$$\begin{aligned} \widetilde{M} \times Aut(\widetilde{M}) &\longrightarrow \widetilde{M} \\ (x, f) &\mapsto f^{-1}(x). \end{aligned}$$

Para definir una trivialización local, sea $U \subseteq M$ un abierto regularmente cubierto al rededor de un punto $m \in M$, $W := \pi^{-1}(U) \subseteq \widetilde{M}$ y fijemos $W_0 \subseteq \pi^{-1}(U)$ una componente conexa de W.

Dado $y \in \pi^{-1}(U)$*, sea* $W_y \subseteq W$ *la componente conexa de* W *que contiene a* y*. Entonces, existe una única* $f_y \in Aut(\widetilde{M})$ *tal que* $f_y|_{W_y} : W_y \to W_0$ *es un difeomorfismo.*

De lo anterior, definimos

$$\begin{aligned} \varphi : \pi^{-1}(U) &\to U \times Aut(\widetilde{M}) \\ y &\mapsto (\pi(y), f_y). \end{aligned}$$

Para ver que la anterior función es $Aut(\widetilde{M})$*-equivariante, sea* $g \in Aut(\widetilde{M})$ *y sea* $z := y \cdot g = g^{-1}(y)$*. Si* W_z *es la componente conexa de* W *que contiene a* z*, entonces existe una única* $f_z \in Aut(\widetilde{M})$ *tal que* $f_z(W_z) = W_0$*, así,* $f_z = f_y \circ g$*. Luego,*

$$\begin{aligned} \varphi(y \cdot g) &= \varphi(z) \\ &= (\pi(z), f_z) \\ &= (\pi(y), f_y \circ g) \\ &= (\pi(y), f_y) \cdot g \\ &= \varphi(y) \cdot g. \end{aligned}$$

De lo anterior se sigue fácilmente que $\pi : \widetilde{M} \to M$ *es un* $Aut(\widetilde{M})$*-fibrado principal, es decir un* $\pi_1(M)$*-fibrado principal.*

Definición 2. Supongamos que $\pi_1 : P_1 \to M$ y $\pi_2 : P_2 \to M$ son dos G-fibrados principales. Un morfismo de π_1 a π_2 es un difeomorfismo $\varphi : P_1 \to P_2$ tal que:

1. φ es G-equivariante.
2. $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & P_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Si $P_1 = P_2$, diremos que φ es un automorfismo del fibrado $\pi_1 : P_1 \to M$.

El grupo *gauge* de $\pi : P \to M$ es el grupo de automorfismos de $\pi : P \to M$. Este conjunto tiene estructura de grupo con la composición de funciones y se denota por $\mathcal{G}(P)$.

1.2. Conexiones en un G-fibrado principal

Definición 3. Sea $\pi : P \to M$ un G-fibrado principal. Una conexión en P es un subfibrado $\mathcal{H}$ de TP tal que para todo $p \in P$ y $g \in G$ se cumple que

1. $T_pP = ker(d\pi_p) \oplus \mathcal{H}_p$.
2. $(dR_g)_p(\mathcal{H}_p) = \mathcal{H}_{pg}$.

De la anterior definición tenemos que si $X \in T_pP$, entonces podemos escribir a X de forma única como $X = X^v + X^h$, donde $X^v \in ker(d\pi_p)$ y $X^h \in \mathcal{H}_p$. El vector $X^v \in ker(d\pi)_p$ es llamado la componente vertical de X, mientras que X^h es llamado el componente horizontal.

A continuación vamos a ver que las conexiones en un G-fibrado principal se pueden definir utilizando formas diferenciales con valores en el álgebra de Lie de G, denotada por $\mathfrak{g}$.

Definición 4. Supongamos que $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de un grupo de Lie G y sea M una variedad suave. Una k-forma diferencial en M con valores en $\mathfrak{g}$ es una asignación que para cada $p \in M$ corresponde una función multilineal alternante

$$\omega_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathfrak{g}$$

que varía suavemente con p.

El conjunto de todas las k-formas en M con valores en $\mathfrak{g}$ será denorado por $\Omega^k(M, \mathfrak{g})$.

Definición 5. Sea $\pi : P \to M$ un G-fibrado principal y sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de G. Dado $A \in \mathfrak{g}$, este induce un campo vectorial en P llamado el campo fundamental asociado a A y está dado por

$$A^*(p) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p \cdot exp(tA).$$

Nota 2. Al identificar a G con P_x, podemos identificar $\mathfrak{g}$ con $T_pP_X = ker(d\pi_p)$. Esto nos permitirá definir una 1-forma $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ a partir de una conexión $\mathcal{H} \subset TP$.

Proposición 1.3. *Para cada $p \in P$ la función μ_p definida por*

$$\begin{aligned} \mu_p : \mathfrak{g} &\to (\ker(d\pi_p)) \\ A &\mapsto A^*(p) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. De la identificación anterior sabemos que $dim(\mathfrak{g}) = dim(ker(d\pi_p))$, por lo tanto, para ver que μ_p es un isomorfismo basta verificar que es una transformación lineal inyectiva.

Sea $A \in \mathfrak{g}$ tal que $\mu_p(A) = 0$, es decir, $A^*(p) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p \cdot exp(tA) = 0$. Veamos que $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} p \cdot exp(tA) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

En efecto, si hacemos $z = t - s$, entonces

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} p \cdot exp(tA) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{z=0} p \cdot exp((z+s)A) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{z=0} p \cdot exp(zA)exp(sA) \\
&= dR_{exp(sA)} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{z=0} p \cdot exp(zA) \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De aquí se sigue que $\alpha(t) = p \cdot exp(tA)$ es una curva constante, y como la acción de G en P es libre, entonces $exp(tA) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y esto implica que $A = 0$. Por lo tanto μ_p es inyectiva y entonces μ_p es un isomorfismo. □

Definición 6. Sean $\pi : P \to M$ un G-fibrado principal y $\mathcal{H}$ una conexión en P. Definimos $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ como

$$\begin{aligned}
\omega : P &\to \wedge^1(T_pP) \otimes \mathfrak{g} = Hom(T_pP, \mathfrak{g}) \\
p &\mapsto \quad \omega_p : T_pP \to \mathfrak{g} \\
&\qquad\qquad X \mapsto \mu_p^{-1}(X^v).
\end{aligned}$$

En otras palabras, $\omega_p(X) = A$, donde $A \in \mathfrak{g}$ es el único elemento del álgebra de Lie de G tal que $A^*(p) = X^v$.

Proposición 1.4. *La 1-forma ω satisface las siguientes propiedades:*

1. $\omega(A^*) = A$ *para todo* $A \in \mathfrak{g}$.
2. $(R_g)^*\omega(X) = Ad_{g^{-1}}(\omega(X))$ *para todo* $g \in G$ *y todo* $X \in TP$.

Demostración. Sean $A \in \mathfrak{g}$ y ω una forma conexión en un G-fibrado principal $\pi : P \to M$, entonces la propiedad 1 se sigue inmediatamente de la definición.

Para probar la propiedad 2 sean $p \in P$, $g \in G$ y $X \in T_pP$, por la linealidad de ω, podemos considerar los siguientes dos casos para X.

Caso 1: Si $X = X^h$, entonces $\omega(X^h) = 0$, por lo tanto

$$0 = (R_g)^*\omega(X^h) = Ad_{g^{-1}}(\omega(X^h)) = 0.$$

Caso 2: Si $X = X^v \in \mathfrak{g}$, entonces tenemos en el lado derecho de la ecuación lo sigiuente:

$$Ad_{g^{-1}}(\omega(X)) = Ad_{g^{-1}}(\omega(X^v)) = Ad_{g^{-1}}(X^v) = Ad_{g^{-1}}(X).$$

Ahora, para calcular el lado izquierdo consideremos X^* el campo fundamental asociado a X, por lo tanto usando la regla de la cadena varias veces y el hecho de que $exp(Ad_g(X)) = C_g(exp(X))$, tenemos

$$\begin{aligned}
(R_g^*\omega)_p(X^*(p)) &= \omega_{pg}\left((dR_g)_p\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p\cdot exp(tX)\right)\right)\\
&= \omega_{pg}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p\cdot exp(tX)g\right)\\
&= \omega_{pg}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (pg)\cdot g^{-1}exp(tX)g\right)\\
&= \omega_{pg}\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (pg)\cdot exp(t\cdot Ad_{g^{-1}}(X))\right)\\
&= Ad_{g^{-1}}(X).
\end{aligned}$$

De lo anterior, vemos que en cualquier caso $(R_g)^*\omega(X) = Ad_{g^{-1}}(\omega(X))$ para todo $g \in G$ y todo $X \in TP$.

□

Proposición 1.5. *Sea $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ tal que satisface las propiedades descritas en la proposición 1.4, entonces $H_p := \{X \in T_pP : \omega(X) = 0\}$ es una conexión en P.*

Demostración. Notemos que $H_p = ker(\omega_p)$, por lo tanto $H = \bigsqcup_{p\in P} H_p$ es un subfibrado de TP.

Sea $X \in T_pP$, entonces $\omega(X) = A \in \mathfrak{g}$. Sea $X^h = X - A^*(p)$, entonces

$$\omega(X^h) = \omega(X - A^*(p)) = \omega(X) - \omega(A^*(p)) = A - A = 0.$$

Por lo tanto, $X^h \in \mathcal{H}_p$.

Supongamos que $X \in \mathcal{H}_p \cap ker(d\pi_p)$. Como $X \in ker(d\pi_p)$, existe $A \in \mathfrak{g}$ tal que $A^*(p) = X$, y como $X \in \mathcal{H}_p$, entonces $A = \omega(A^*(p)) = \omega(X) = 0$, así $A^*(p) = X = 0$, es decir, $\mathcal{H}_p \cap ker(d\pi_p) = \{0\}$.

De lo anterior concluimos que $T_pP = ker(d\pi_p) \oplus \mathcal{H}_p$.

Por otra parte, sean $g \in G$ y $X \in \mathcal{H}_p$, entonces

$$\omega(dR_g(X)) = R_g^*(\omega)(X) = Ad_{g^{-1}}(\omega(X)) = 0.$$

Por lo tanto, $dR_g(\mathcal{H}_p) \subseteq \mathcal{H}_{pg}$. Análogamente se sigue que $dR_{g^{-1}}\mathcal{H}_{pg} \subseteq h_p$, por lo tanto $\mathcal{H}_{pg} = dR_g(\mathcal{H}_p)$.

Concluimos que $\mathcal{H}$ es una conexión en P. $\square$

De las proposiciones 1.4 y 1.5 concluimos que existe una biyección entre las conexiónes en P y las formas $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ que satisfacen las propiedades descritas en 1.4.

1.3. Descripción local de las formas conexión

Supongamos que $\pi : P \to M$ es un G-fibrado principal con una conexión $\mathcal{H}$ cuya forma conexión es $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Por definición podemos encontrar un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de M, junto con trivializaciones locales

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G.$$

Definición 7. Dada una trivialización local $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$, definimos:

(a) $g_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to G$ como el mapeo

$$\begin{aligned} g_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\to G \\ p &\mapsto g_\alpha(p) := \pi_2 \circ \psi_\alpha(p), \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\psi_\alpha"] \arrow[rr, bend right, "g_\alpha"'] & U_\alpha \times G \arrow[r, "\pi_2"] & G. \end{tikzcd}$$

(b) $S_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ dada por

$$S_\alpha(x) := \psi_\alpha^{-1}(x, e).$$

De la definición es claro que S_α es un mapeo suave. Por otra parte, S_α es una sección de $\pi\big|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$, es decir, $\pi \circ S_\alpha(x) = x$ para todo $x \in U_\alpha$.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}"] & U_\alpha. \arrow[l, bend left, "S_\alpha"] \end{tikzcd}$$

(c) Utilizando S_α, definimos la forma $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$ como

$$A_\alpha := S_\alpha^*(\omega) \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g}).$$

Estas formas son llamadas *Campos Gauge.*

Definición 8. Sea G un grupo de Lie y consideremos el difeomorfismo $L_{g^{-1}} : G \to G$ para cada $g \in G$, entonces

$$\left(dL_{g^{-1}}\right)_g : T_gG \to T_eG = \mathfrak{g}.$$

De esta manera podemos obtenemos una 1-forma $\theta \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$, es decir,

$$\theta_g := \left(dL_{g^{-1}}\right)_g : T_gG \to \mathfrak{g}.$$

La 1-forma θ es llamada la forma de *Maurer-Cartan.*

Proposición 1.6. *La función g_α es suave y G-equivariante, es decir, para todo $g \in G$ tenemos que*

$$g_\alpha(pg) = g_\alpha(p)g.$$

Demostración. Claramente g_α es suave por ser la compuesta de dos mapeos suaves. Ahora, como la acción de G en $U \times G$ está dada por $(x, h)g = (x, hg)$ y ψ_α es un mapeo G-equivariante, se sigue que g_α es G-equivariante. □

Consideremos dos trivializaciones locales ψ_α y ψ_β. Si denotamos $U_{\alpha,\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$, y suponemos que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U_{\alpha,\beta} \times G \arrow[rr, bend left, "\psi_{\alpha,\beta}"] \arrow[dr, "\pi_1"] & \pi^{-1}(U_{\alpha,\beta}) \arrow[l, "\psi_\beta|_{\pi^{-1}(U_{\alpha,\beta})}"'] \arrow[r, "\psi_\alpha|_{\pi^{-1}(U_{\alpha,\beta})}"] \arrow[d, "\pi"] & U_{\alpha,\beta} \times G \arrow[dl, "\pi_1"'] \\ & U_{\alpha,\beta}, & \end{tikzcd}$$

donde $\psi_{\alpha,\beta} := \left(\psi_\alpha\big|_{\pi^{-1}(U_{\alpha,\beta})}\right) \circ \left(\psi_\beta\big|_{\pi^{-1}(U_{\alpha,\beta})}\right)^{-1}$.

Entonces podemos escribir a $\psi_{\alpha,\beta}$ de la forma

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha,\beta} : U_{\alpha,\beta} \times G &\to U_{\alpha,\beta} \times G \\ (x,h) &\mapsto (x, g_{\alpha,\beta}(x)h) \end{aligned}$$

donde $g_{\alpha,\beta} : U_{\alpha,\beta} \to G$ están dadas por $g_{\alpha,\beta}(x) = g_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x,1) = g_\alpha \circ S_\beta(x)$.

Proposición 1.7. *Las funciones $g_{\alpha,\beta}$ son suaves y satisfacen las propiedades de cociclos, es decir, satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $g_{\alpha,\alpha}(x) = e \in G$ *para todo* $x \in U_{\alpha,\beta}$.
2. $g_{\alpha,\beta}(x) = g_{\beta,\alpha}(x)^{-1}$.
3. $g_{\alpha,\gamma}(x) = g_{\alpha,\beta}(x) g_{\beta,\gamma}(x)$ *para todo* $x \in U_{\alpha,\beta,\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Demostración. Notemos que $g_{\alpha,\alpha}$ está determinada por $\varphi_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = Id_{U_\alpha \times G}$, por lo tanto $g_{\alpha,\alpha} = e$.

Ahora, notemos que $\psi_{\alpha,\beta} \circ \psi_{\beta,\alpha} = Id_{U_\alpha \times G}$, por lo tanto

$$(x,h) = (x, g_{\alpha,\beta}(x) g_{\beta,\alpha}(x) h).$$

Así, $g_{\alpha,\beta}(x) = g_{\beta,\alpha}(x)^{-1}$.

Por último, para todo $x \in U_{\alpha,\beta,\gamma} := U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ se tiene que

$$\psi_{\alpha,\gamma}(x) = \psi_{\alpha,\beta} \circ \psi_{\beta,\gamma}(x).$$

Por lo tanto, de la definición de estas funciones se sigue que $g_{\alpha,\gamma}(x) = g_{\alpha,\beta}(x) g_{\beta,\gamma}(x)$. □

Teorema 1.8. *Sean $\pi : P \to G$ un G-fibrado principal, ω una forma conexión en P, $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ una trivialización local y $\omega_\alpha := \omega\big|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$. Entonces*

$$\omega_\alpha = Ad_{g_\alpha^{-1}} \circ (\pi^* A_\alpha) + (g_\alpha)^* \theta.$$

Demostración. Vamos a demostrar que $\tau_\alpha = Ad_{g_\alpha^{-1}} \circ (\pi^* A_\alpha) + (g_\alpha)^* \theta$ es una forma conexión, es decir, que satisface las propiedades descritas en la proposición 1.4.

Sean $p \in P$, $X \in \mathfrak{g}$ y sea X^* el campo fundamental asociado a X. Entonces

$$\begin{aligned}
(\tau_\alpha)_p(X^*(p)) &= Ad_{g_\alpha^{-1}(p)} \circ (\pi^* A_\alpha)_p(X^*(p)) + ((g_\alpha)^*\theta)_p(X^*(p)) \\
&= Ad_{g_\alpha^{-1}(p)} \circ (A_\alpha)_{\pi(p)} \left(d\pi_p(X^*(p))\right) + \theta_{g_\alpha(p)} \left((dg_\alpha)_p(X^*(p)\right) \\
&= \theta_{g_\alpha(p)} \left((dg_\alpha)_p \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p \cdot exp(tX) \right)\right) \\
&= \theta_{g_\alpha(p)} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_\alpha \left(p \cdot exp(tX)\right) \right) \\
&= \theta_{g_\alpha(p)} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_\alpha(p) \cdot exp(tX) \right) \\
&= \left(dL_{g_\alpha^{-1}(p)} \right)_{g_\alpha(p)} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_\alpha(p) \cdot exp(tX) \right) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_\alpha^{-1}(p) \left(g_\alpha(p) \cdot exp(tX)\right) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} exp(tX) \\
&= X.
\end{aligned}$$

Así $\tau_\alpha(X^*) = X$ para todo $p \in P$ y todo $X \in \mathfrak{g}$.

Nota 3. Para evitar alguna confusión en esta prueba, $\overline{R} : P \to P$ será el difeomorfismo inducido por la acción de G en P para cada $g \in G$ y R_g la multiplicación a derecha en G.

Ahora veamos que $\overline{R}_g^* \tau_\alpha = Ad_{g^{-1}} \tau_\alpha$, que por la linealidad del pullback y Ad, basta verificar que la igualdad se cumple para cada sumando de τ_α.

En efecto, sean $p \in P$ y $V \in T_pP$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{R}_g^*(Ad_{g_\alpha^{-1}} \circ (\pi^* A_\alpha))_p(V) &= Ad_{g_\alpha^{-1}(pg)} \circ (\pi^* A_\alpha)_{pg}((d\overline{R}_g)_p(V)) \\
&= Ad_{g^{-1} g_\alpha^{-1}(p)} \circ (A_\alpha)_{\pi(pg)}((d(\pi \circ \overline{R}_g)_p(V)) \\
&= Ad_{g^{-1}} \left(Ad_{g_\alpha^{-1}(p)} \circ (A_\alpha)_{\pi(p)}((d(\pi)_p(V)) \right) \\
&= Ad_{g^{-1}} \left(Ad_{g_\alpha^{-1}(p)} \circ (\pi^* A_\alpha)_p(V) \right) \\
&= Ad_{g^{-1}} \left(Ad_{g_\alpha^{-1}} \circ (\pi^* A_\alpha) \right)_p (V).
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\overline{R}_g^*(Ad_{g_\alpha^{-1}} \circ (\pi^* A_\alpha)) = Ad_{g^{-1}} \left(Ad_{g_\alpha^{-1}} \circ (\pi^* A_\alpha) \right). \qquad (1)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\overline{R}_g^*(g_\alpha^*\theta)_p(V) &= (g_\alpha^*\theta)_{pg}((d\overline{R}_g)_p(V)) \\
&= \theta_{g_\alpha(pg)}\left((dg_\alpha)_{pg}(d\overline{R}_g)_p(V))\right) \\
&= \theta_{g_\alpha(pg)}\left(d(g_\alpha \circ \overline{R}_g)_p(V))\right) \\
&= \theta_{g_\alpha(p)g}\left(d(R_g \circ g_\alpha)_p(V))\right) \\
&= \left(dL_{g^{-1}g_\alpha(p)^{-1}}\right)_{g_\alpha(p)g}\left((dR_g)_{g_\alpha(p)} \circ (dg_\alpha)_p(V)\right) \\
&= \left(dL_{g^{-1}}\right)_g \left(dL_{g_\alpha(p)^{-1}}\right)_{g_\alpha(p)g}\left(dR_g\right)_{g_\alpha(p)}\left((dg_\alpha)_p(V)\right) \\
&= \left(dL_{g^{-1}}\right)_g \left(d(L_{g_\alpha(p)^{-1}} \circ R_g)\right)_{g_\alpha(p)}\left((dg_\alpha)_p(V)\right) \\
&= \left(dL_{g^{-1}}\right)_g \left(d(R_g \circ L_{g_\alpha(p)^{-1}})\right)_{g_\alpha(p)}\left((dg_\alpha)_p(V)\right) \\
&= \left(\left(dL_{g^{-1}}\right)_g \left(dR_g\right)_e\right)\left(dL_{g_\alpha(p)^{-1}}\right)_{g_\alpha(p)}\left((dg_\alpha)_p(V)\right) \\
&= d\left(L_{g^{-1}} \circ R_g\right)_e \left(\theta_{g_\alpha(p)}\left((dg_\alpha)_p(V)\right)\right) \\
&= Ad_{g^{-1}}\left((g_\alpha^*\theta)_p V\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\overline{R}_g^*(g_\alpha^*\theta) = Ad_{g^{-1}}\left((g_\alpha^*\theta)\right). \qquad (2)$$

Finalmente, de (1) y (2) se sigue que $\overline{R}_g^*(\tau_\alpha) = Ad_{g^{-1}}(\tau_\alpha)$, por lo tanto podemos concluir que τ_α es una forma conexión en $\pi^{-1}(U_\alpha)$.

Ahora, para demostrar que $\tau_\alpha = \omega_\alpha$ veamos primero que $S_\alpha^*\omega_\alpha = S_\alpha^*\tau_\alpha$.

Para esto notemos primero que para todo $x \in U_\alpha$ se tiene que $g_\alpha \circ S_\alpha(x,e) = \pi_2 \circ \psi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}(x,e) = e$, es decir, $g_\alpha \circ S_\alpha$ es la función constante $x \mapsto e$, y recordemos que $\pi \circ S_\alpha(x) = x$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
S_\alpha^*\tau_\alpha &= S_\alpha^*\left(Ad_{g_\alpha^{-1}} \circ (\pi^*A_\alpha) + (g_\alpha)^*\theta\right) \\
&= Ad_{(g_\alpha \circ S_\alpha)^{-1}} \circ (S_\alpha^*\pi^*A_\alpha) + S_\alpha^* g_\alpha^*\theta \\
&= Ad_e \circ (\pi \circ S_\alpha)^* A_\alpha + (g_\alpha \circ S_\alpha)^*\theta \\
&= A_\alpha \\
S_\alpha^*\tau_\alpha &= S_\alpha^*\omega.
\end{aligned}$$

Lo anterior nos dice que si $X \in T_xM$, entonces $\tau_\alpha((dS_\alpha)_x(X)) = \omega_\alpha((dS_\alpha)_x(X))$.

Ahora, podemos tomar una trivialización local ψ_α tal que $S_\alpha(x) = p$, por lo tanto si $v \in T_pP$ y definimos $v_\alpha := (dS_\alpha)_x(d\pi_p(v)) \in T_pP$ entonces

$$\begin{aligned} d\pi_p(v - v_\alpha) &= d\pi_p(v) - d\pi_p(v_\alpha) \\ &= d\pi_p(v) - d\pi_p((dS_\alpha)_x(d\pi_p(v))) \\ &= d\pi_p(v) - d(\pi \circ S_\alpha)_x(d\pi_p(v)) \\ &= d\pi_p(v) - d\pi_p(v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, $v - v_\alpha$ es un vector vertical, por lo tanto $\tilde{\omega}(v - v_\alpha) = v - v_\alpha$ para cualquier forma conexión $\tilde{\omega}$.

De lo anterior, dado $v \in T_pP$ arbitrario, tenemos que

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(v) &= \omega_\alpha(v - v_\alpha + v_\alpha) \\ &= \omega_\alpha(v - v_\alpha) + \omega_\alpha(v_\alpha) \\ &= (v - v_\alpha) + \omega_\alpha\,(dS_\alpha)_x(d\pi_p(v)) \\ &= \tau_\alpha(v - v_\alpha) + \tau_\alpha\,((dS_\alpha)_x(d\pi_p(v))) \\ &= \tau_\alpha(v - v_\alpha + v_\alpha) \\ \omega_\alpha(v) &= \tau_\alpha(v). \end{aligned}$$

Por lo tanto concluimos que $\omega_\alpha = \tau_\alpha$.

Nota *4.* En caso de que $S_\alpha(x) \neq p$, lo que sabemos es que $S_\alpha(x) = p \cdot g$, para algún $g \in G$, entonces podemos definir v_α como $v_\alpha := (dR_{g^{-1}})\,(dS_\alpha)_x(d\pi_p(v))$ y así $v - v_\alpha$ es vertical por la G-invarianza de π.

$\square$

Del teorema anterior tenemos el siguiente corolario, el cual nos da una relación entre A_α y A_β siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Corolario 1.9. *Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces*

$$A_\beta = Ad_{(g_{\alpha,\beta})^{-1}} \circ A_\alpha + (g_{\alpha,\beta})^*\theta.$$

Demostración. Para empezar notemos que en $\pi^{-1}(U_{\alpha,\beta})$ tenemos que

$$\omega\big|_{\pi^{-1}(U_{\alpha,\beta})} = \omega_\alpha = \omega_\beta,$$

por lo tanto en $U_{\alpha,\beta}$

$$\begin{aligned}
A_\beta = S_\beta^*\omega_\beta &= S_\beta^*\omega_\alpha \\
&= S_\beta^*\left(Ad_{g_\alpha^{-1}} \circ (\pi^* A_\alpha) + (g_\alpha)^*\theta\right) \\
&= Ad_{(g_\alpha \circ S_\beta)^{-1}} \circ (S_\beta^* \pi^* A_\alpha) + S_\beta^* g_\alpha^* \theta \\
&= Ad_{(g_\alpha \circ S_\beta)^{-1}} \circ (\pi \circ S_\beta)^* A_\alpha + (g_\alpha \circ S_\beta)^*\theta \\
A_\beta &= Ad_{(g_{\alpha,\beta})^{-1}} \circ A_\alpha + (g_{\alpha,\beta})^*\theta.
\end{aligned}$$

□

Esta relación determina de forma única a ω, por lo tanto otra forma de definir una conexión en P es encontrar una familia de 1-formas $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$, con $A_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha, \mathfrak{g})$, tales que en $U_\alpha \cap U_\beta$ se cumpla que $A_\beta = Ad_{(g_{\alpha,\beta})^{-1}} \circ A_\alpha + (g_{\alpha,\beta})^*\theta$.

1.4. Levantamientos horizontales

Supongamos que $\pi : P \to M$ es un G-fibrado principal con una conexión $\mathcal{H}$ cuya forma conexión es $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un cubrimiento abierto de M, junto con trivializaciones locales

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G.$$

Definición 9. Sea $\gamma : [0,1] \to M$ una curva suave (o suave por tramos). Un levantamiento horizontal de γ es una función suave (o suave por tramos) $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to P$ tal que pata todo $t \in [0,1]$

(a) $\pi \circ \widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$.

(b) $\widetilde{\gamma}'(t) \in \mathcal{H}_{\widetilde{\gamma}(t)} \subset T_{\widetilde{\gamma}(t)}P$.

Teorema 1.10. *Sea G un grupo de Lie compacto. Supongamos que $\pi : P \to M$ es un G-fibrado principal con una conexión $\mathcal{H}$ cuya forma conexión es $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ y sea $\gamma : [0,1] \to M$ una curva suave. Dado $p_0 \in \pi^{-1}(\gamma(0)) =: P_{\gamma(0)}$ existe un único levantamiento horizontal $\widetilde{\gamma}$ de γ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = p_0$.*

Demostración. Por el teorema del número de Lebesgue podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\gamma([0,1]) \subset U_\alpha$ para algún $\alpha \in J$.

Sea $\beta(t) = S_\alpha(\gamma(t))$, entonces $\pi(\beta(t)) = \pi(S_\alpha(\gamma(t))) = \gamma(t)$, es decir, $\beta(t)$ es un levantamiento de γ que no necesariamente es horizontal, por lo tanto necesitamos encontrar una curva suave $g : [0,1] \to G$ talque $\widetilde{\gamma}(t) := \beta(t)g(t)$ sea horizontal, en otras palabras, queremos que $\omega(\widetilde{\gamma}'(t)) = 0$ para todo $t \in [0,1]$.

Como G es un grupo de Lie compacto, podemos suponer que G es un subgrupo de $Gl_n(\mathbb{R})$ para un $n > 0$ suficientemente grande, por lo tanto $\mathfrak{g}$ es subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, así la representación adjunta en G es conjugación de matrices y $dL_g(h) = gh$ para todo $g, h \in G$.

Ahora como $\psi_\alpha(\widetilde{\gamma}(t)) = (\gamma(t), g(t))$, entonces $g_\alpha(\widetilde{\gamma}(t)) = \pi_2 \circ \psi_\alpha(\widetilde{\gamma}(t)) = g(t)$, por lo tanto del teorema 1.8 se tiene que

$$\begin{aligned}
0 = \omega_\alpha(\widetilde{\gamma}'(t)) &= Ad_{g(t)^{-1}} \circ (\pi^* A_\alpha)(\widetilde{\gamma}'(t)) + (g_\alpha)^* \theta(\widetilde{\gamma}'(t)) \\
&= Ad_{g(t)^{-1}} \circ (A_\alpha)(d(\pi \circ \widetilde{\gamma})(t)) + \theta(d(g_\alpha \circ \widetilde{\gamma})(t)) \\
&= Ad_{g(t)^{-1}} \circ (A_\alpha)(\gamma'(t)) + \theta(g'(t)) \\
&= Ad_{g(t)^{-1}} \circ (A_\alpha)(\gamma'(t)) + d(L_{g(t)^{-1}})(g'(t)) \\
0 &= g(t)^{-1}(A_\alpha \gamma'(t)) g(t) + g(t)^{-1} g'(t) \\
0 &= (A_\alpha \gamma'(t)) g(t) + g'(t) \\
g'(t) &= -(A_\alpha \gamma'(t)) g(t).
\end{aligned}$$

Es decir, $g'(t) = -(A_\alpha \gamma'(t))g(t)$ es un sistema de EDO con coeficientes suaves, y por lo tanto si tenemos condiciones iniciales del sistema, en este caso, $g(0)$ tal que $\beta(0)g(0) = p_0$, el sistema tiene una única solución $g : [0, 1] \to G$.

De lo anterior, $\widetilde{\gamma}(t) := \beta(t)g(t)$ es el único levantamiento horizontal de γ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = p_0$. □

Nota 5. El anterior teorema es cierto para cualquier grupo de Lie. Por simplicidad en la prueba se hizo sólo para grupos de Lie compactos.

Definición 10. Supongamos que $\gamma : [0, 1] \to M$ es una curva suave. Si $p \in P_{\gamma(0)}$, por el teorema anterior existe un único levantamiento $\widetilde{\gamma}_p$ horizontal de γ que empieza en p. Definimos la función Π_γ, llamada el transporte paralelo a lo largo de γ respecto a la conexión $\mathcal{H}$, como

$$\begin{aligned}
\Pi_\gamma : P_{\gamma(0)} &\to P_{\gamma(1)} \\
p &\mapsto \widetilde{\gamma}_p(1).
\end{aligned}$$

Fácilmente se puede ver que si $\overline{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$ es el camino reverso de γ, entonces $\Pi_\gamma^{-1} = \Pi_{\overline{\gamma}}$, por lo tanto, si $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, entonces Π_γ es una biyección de P_{x_0} en sí mismo.

Lema 1.11. *El transporte paralelo Π_γ es G-equivariante, es decir,*

$$\Pi_\gamma(pg) = \Pi_\gamma(p) \cdot g$$

para todo $p \in P_{\gamma(0)}$ y todo $g \in G$.

Demostración. Sea $\widetilde{\gamma}$ el levantamiento horizontal de γ que empieza en p, entonces por definición $\Pi_\gamma(p) = \widetilde{\gamma}(1)$, por lo tanto $\Pi_\gamma(p)g = \widetilde{\gamma}(1)\cdot g$. Por otra parte, $R_g(\widetilde{\gamma})$ es un levantamiento horizontal de γ que empieza en $\gamma(0)\cdot g = pg$, por lo tanto, por la unicidad de los levantamientos horizontales con punto inicial dado, $\Pi_\gamma(pg) = R_g(\widetilde{\gamma}(1)) = \widetilde{\gamma}(1)\cdot g$. Así, $\Pi_\gamma(pg) = \Pi_\gamma(p)\cdot g$. $\square$

1.5. Grupos de holonomía

Definición 11. El grupo de holonomía de la conexión $\mathcal{H}$ en $x_0 \in M$ se define como

$$\mathcal{K}_{x_0} = \{\Pi_\gamma | \gamma : [0,1] \to M \text{ es una curva suave } \ y \ \ \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

Proposición 1.12. $\mathcal{K}_{x_0}$ *es un grupo bajo la composición de funciones.*

Demostración. El elemento identidad está dado por $\Pi_{C_{x_0}}$, el producto está bien definido por ser lazos cerrados en x_0 y del hecho que Π_γ es G-equivariante.

Además ya hemos visto que $\Pi_\gamma^{-1} = \Pi_{\gamma(1-t)}$, por lo tanto, como la composición de funciones es asociativa, se sigue que $\mathcal{K}_{x_0}$ es un grupo con dicha operación. $\square$

Ahora sea $x_0 \in M$ y fijemos $p \in P_{x_0}$. Sea $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, entonces Π_γ es una biyección de P_{x_0} en sí mismo, luego $\Pi_\gamma(p) \in P_{x_0}$, y como la acción de G es libre y transitiva en las fibras se tiene que $\Pi_\gamma(p) = p\cdot g_\gamma(p)$ para un único $g_\gamma(p) \in G$. Además del hecho de que $\Pi_\gamma^{-1} = \Pi_{\overline{\gamma}}$ se sigue que $g_\gamma(p)^{-1} = g_{\overline{\gamma}}(p)$.

Definición 12. Teniendo en cuenta el párrafo anterior, definimos la holonomía de $\mathcal{H}$ en p como

$$\mathcal{K}_p = \{g_\gamma(p) | \gamma : [0,1] \to M \quad y \quad \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

En algunas ocaciones escribiremos $Hol_p(\mathcal{H}, \alpha)$ en vez de $g_\alpha(p)$ para especificar que es respecto a la conexión $\mathcal{H}$.

Proposición 1.13. $\mathcal{K}_p$ *es un subgrupo de* G.

Demostración. Para ver que $\mathcal{K}_p$ es un subgrupo veamos que $\mathcal{K}_p \neq \emptyset$ y que para todo $g, h \in \mathcal{K}_p$ tenemos que $gh^{-1} \in \mathcal{K}_p$.

Para ver que $\mathcal{K}_p \neq \emptyset$ notemos que $e \in \mathcal{K}_p$, pues si γ es el camino constante en x_0, entonces $g_\gamma(p) = e$.

Ahora supongamos que $g_\alpha(p), g_\beta(p) \in \mathcal{K}_p$, y recordemos que $g_\beta(p)^{-1} = g_{\overline{\beta}}(p)$, donde $\overline{\beta}$ denota el camino reverso de β.

Sea $\widetilde{\overline{\beta}}$ el levantamiento horizontal de $\overline{\beta}$ que empieza en p y $\widetilde{\alpha}$ el levantamiento horizontal de α que empieza en $p\cdot g_\beta(p)^{-1}$, entonces $\widetilde{\overline{\beta}} * \widetilde{\alpha}$ es un camino ya que $\widetilde{\overline{\beta}}(1) =$

$\widetilde{\alpha}(0)$, y además es el levantamiento de $\overline{\beta} * \alpha$ que empieza en p, entonces usando el lema 1.11 tenemos que

$$\begin{aligned}\Pi_{\overline{\beta}*\alpha}(p) &= \widetilde{\alpha}(1) \\ &= \Pi_\alpha(p \cdot g_\beta(p)^{-1}) \\ &= \Pi_\alpha(p) \cdot g_\beta(p)^{-1} \\ &= p \cdot g_\alpha(p) g_\beta(p)^{-1}.\end{aligned}$$

Así concluimos que $g_\alpha(p)g_\beta(p)^{-1} \in \mathcal{K}_p$ y por lo tanto $\mathcal{K}_p$ es un subgrupo de G. □

Proposición 1.14. *Si $p, q \in P_{x_0}$, entonces $\mathcal{K}_q = h^{-1}\mathcal{K}_p h$ para algún $h \in G$. Es decir, los grupos de holonomía $\mathcal{K}_p$ no dependen de la escogencia de p módulo conjugación.*

Demostración. Sean $p, q \in P_{x_0}$, como la acción de G es libre y transitiva en las fibras, existe un único $h \in G$ tal que $q = p \cdot h$, entonces

$$\begin{aligned}\Pi_\gamma(q) &= \Pi_\gamma(ph) \\ &= \Pi_\gamma(p) \cdot h \\ &= \widetilde{\gamma}_p(1) \cdot h \\ &= p \cdot g_\gamma(p) h \\ &= (ph) \cdot (h^{-1} g_\gamma(p) h) \\ q \cdot g_\gamma(q) &= q \cdot (h^{-1} g_\gamma(p) h).\end{aligned}$$

De lo anterior, como la acción es libre se siguie que $g_\gamma(q) = h^{-1} g_\gamma(p) h$, por lo tanto $\mathcal{K}_q = h^{-1}\mathcal{K}_p h$. □

Definición 13. Sea $p \in P_{x_0}$, definimos el grupo de holonomía restringido de $\mathcal{H}$ en p como

$$\mathcal{K}_p^\circ = \{g_\gamma(p) | \gamma : [0,1] \to M, \quad \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \quad y \quad \gamma \simeq e_{x_0}\}.$$

Análogamente a como se hizo con $\mathcal{K}_p$, se puede probar que $\mathcal{K}_p^\circ$ es un subgrupo de K_p, y por lo tanto de G.

Lema 1.15 (Lema 4,2 [KN96]). *Sean $f : I \times I \to M$ y $u_0 : [0,1] \to P$ funciones suaves tales que $\pi(u_0(s)) = f(0,s)$. Para cada $s \in I$ sea $u_1(s)$ el elemento de P obtenido por el transporte paralelo de $u_0(s)$ a lo largo de la curva $f(t,s)$, donde $t \in I$ y s está fijo. Entonces la curva $u_1(s)$, con $s \in I$ es diferenciable.*

Lema 1.16 (Apéndice 4 [KN96]). *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo de G arcoconexo por caminos seccionalmente diferenciables, entonces H tiene una estructura de grupo de Lie tal que la inclusión $i : H \hookrightarrow G$ es una inmersión.*

Teorema 1.17. *Supongamos que $\pi : P \to M$ es un G-fibrado principal con M una variedad suave y conexa, y sea $\mathcal{H}$ una conexión en P. Entonces:*

(1) $\mathcal{K}_p^\circ$ tiene una estructura de grupo de Lie conexo de tal forma que la inclusión $i : \mathcal{K}_p^\circ \hookrightarrow G$ es una función suave.

(2) $\mathcal{K}_p$ también tiene una estructura de grupo de Lie tal que la función inclusión $i : \mathcal{K}_p \hookrightarrow G$ es una función suave y además $\mathcal{K}_p^\circ$ es la componente conexa que contiene a la identidad en $\mathcal{K}_p$.

Demostración. (1) De 1.16 se sigue que basta probar que $\mathcal{K}_p^\circ$ es arco-conexo.

Sea $x := \pi(p) \in M$, y supongamos que γ es un lazo cerrado en x, suave y homotópico al lazo trivial, entonces por el lema de factorización apéndice 7 [KN96], sabemos que γ es equivalente a un producto lazos cerrados de la forma $\overline{\tau} \cdot \beta \cdot \tau$, donde τ es una curva seccionalmente suave desde x a un punto $y \in M$, y β es una lazo suave y cerrado en y, qué está contenido en un abierto trivializable y de coordenadas de M. Como este abierto siempre se puede tomar difeomorfo a una bola abierta en $\mathbb{R}^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, $\beta \simeq C_y$.

Por otra parte, si $\widetilde{\tau}$ es el levantamiento horizontal de τ que empieza en p, notemos que el elemento de $\mathcal{K}_p^\circ$ determinado por $\overline{\tau} \cdot \beta \cdot \tau$ es el mismo que el determinado por β en $\mathcal{K}_q^\circ$.

De lo anterior, para ver que $\mathcal{K}_p^\circ$ es arco-conexo, basta ver que los elementos de $\mathcal{K}_p^\circ$, definidos por el lazo β puede conectarse por una curva suave con el elmento identidad, por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la imagen de γ está contenida en un abierto trivializable.

Supongamos que $\gamma : [0,1] \to M$ es una curva suave tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, $\gamma \simeq C_{x_0}$ y $\gamma([0,1]) \subseteq U$, dónde U es un abierto de coordenadas de M y además es trivializable.

Sea $f : I \times I \to M$ una homotopía entre γ y C_x, con $f(t,0) = \gamma(t)$ y $f(t,1) = x_0$. Para cada s fijo, sea $u_0(s) = p$ el lazo constante, entonces $\pi(u_0(s)) = f(0,s) = x_0$. Sea $u_1(s)$ el elemento de P obtenido por el transporte paralelo de $u_0(s)$ a lo largo de la curva $f(t,s)$. Si definimimos para cada s fijo $\alpha_s(t) = f(t,s)$, entonces $u_1(s) = p \cdot g_{\alpha_s}(p)$. Del lema anterior se sigue que $u_1(s)$ es una curva suave, por lo tanto, $g(s) := g_{\alpha_s}(p)$ es una curva suave en G y además $g(0) = g_\gamma(p)$ y $g(1) = e_G$, por lo tanto $\mathcal{K}_p^0$ es un subgrupo arco-conexo de G, luego $\mathcal{K}_p^0$ tiene una única estructura de grupo de Lie tal que $i : \mathcal{K}_p^0 \hookrightarrow G$ es una inmersión.

(2) Sea $\pi_1(M, x_0)$ el grupo fundamental de M en x_0. Definamos el homomorfismo $\psi : \pi_1(M, x_0) \to \mathcal{K}_p/\mathcal{K}_p^0$, como $\psi([\alpha]) = g_\alpha(p)$. Es mapeo está bien definido ya que si $[\alpha] = [\beta]$ entonces $[\alpha * \overline{\beta}] = [C_{x_0}]$, por lo tanto $g_{\alpha*\overline{\beta}} \in \mathcal{K}_{x_0}^0$, así $\psi([\alpha]) = \psi([\beta])$.

Este mapeo es claramente sobreyectivo, y como M es una variedad suave conexa, entonces $\pi_1(M, x_0)$ es contable, por lo tanto $\mathcal{K}_p/\mathcal{K}_p^0$ es contable, es decir, es un conjunto discreto.

De lo anterior, $\mathcal{K}_p = \bigsqcup g_\alpha(p) \cdot \mathcal{K}_p^0$, por lo tanto podemos dotar a $\mathcal{K}_p$ de una estructura de variedad diferencial tal que $j : \mathcal{K}_p^0 \hookrightarrow \mathcal{K}_p$ es un difeomorfismo a su imagen. Como $i : \mathcal{K}_p^0 \hookrightarrow G$ es una inmersión, entonces $i : \mathcal{K}_p \hookrightarrow G$ también lo es.

□

Nota 6. En general $\mathcal{K}_p$ y $\mathcal{K}_p^0$ no son subgrupos cerrados de G, por lo tanto $\mathcal{K}_p$ y $\mathcal{K}_p^0$ no son subgrupos de Lie de G.

1.6. Curvatura

Definición 14. Sea $\pi : P \to M$ un G-fibrado principal con conexión $\mathcal{H}$ y sea $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ la forma conexión asociada a $\mathcal{H}$. Definimos la curvatura de $\mathcal{H}$ como $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$

$$\begin{aligned} \Omega_p : T_pP \times T_pP &\to \mathfrak{g} \\ (X, Y) &\mapsto \Omega_p(X, Y) := d\omega(X^h, Y^h), \end{aligned}$$

donde X^h y Y^h son las componentes horizontales de X y Y respectivamente.

Proposición 1.18. *La curvatura Ω satisface la siguiente ecuación, llamada la ecuación estructural.*

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Demostración. Sean $X, Y \in T_pP$. Para demostrar la ecuación estructural basta considerar los siguientes casos.

Caso 1: X y Y son vectores horizontales. Como ω se anula en los vectores horizontales tenemos que $[\omega(X), \omega(Y)] = 0$, por lo tanto

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X^h, Y^h) = d\omega(X, Y).$$

Caso 2: X y Y son vectores verticales. En este caso $X^h = Y^h = 0$, por lo tanto $\Omega(X, Y) = 0$.

Por otra parte, como X y Y son verticales, podemos considerar X^* y Y^* los campos fundamentales asociados a X y Y respectivamente, y así tenemos que

$$d\omega(X, Y) = d\omega(X^*(p), Y^*(p)) = (d\omega(X^*, Y^*))(p).$$

Ahora, usando la fórmula de la derivada exterior de una 1-forma, proposición 14.29 [Lee03], y el hecho de que $\omega(X^*)$ y $\omega(Y^*)$ son funciones constantes tenemos que

$$\begin{aligned} d\omega(X^*,Y^*) &= X^*(\omega(Y^*)) - Y^*(\omega(X^*)) - \omega([X^*,Y^*]) \\ &= -\omega([X^*,Y^*]) \\ &= -\omega([X,Y]^*) \\ &= -[X,Y]. \end{aligned}$$

Por otra parte tenemos que

$$[\omega,\omega](X^*,Y^*) = ([\omega(X^*),\omega(Y^*)] - [\omega(Y^*),\omega(X^*)]) = 2[\omega(X^*),\omega(Y^*)] = 2[X,Y].$$

De lo anterior se sigue claramente $d\omega(X,Y) + \dfrac{1}{2}[\omega,\omega](X,Y) = 0$.

Caso 3: Supongamos que X es vertical y Y horizontal. En este caso $X^h = 0$ y $Y^h = Y$, por lo tanto

$$\Omega(X,Y) := d\omega(0,Y^h) = 0.$$

Es decir, en este caso la curvatura es cero.

Por otra parte, como Y es horizontal tenemos que $\omega(Y) = 0$, por lo tanto

$$[\omega(X),\omega(Y)] = [\omega(X),0] = 0.$$

Sólo resta ver que $d\omega(X,Y) = 0$. Para esto consideremos nuevamente X^* el campo fundamental asociado a X y además sea $\overline{Y}$ un campo horizontal tal que $\overline{Y}_p = Y$, entonces

$$d\omega(X,Y) = d\omega(X^*,\overline{Y})(p).$$

Así, usando la misma fórmula que en el caso anterior y el hecho de que $\omega(X^*)$ es una función constante y $\omega(\overline{Y}) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} d\omega(X^*,\overline{Y}) &= X^*(\omega(\overline{Y})) - \overline{Y}(\omega(X^*)) - \omega([X^*,\overline{Y}]) \\ &= -\omega([X^*,\overline{Y}]). \end{aligned}$$

Veamos ahora que $[X^*,\overline{Y}] \in ker\omega$, es decir, que $[X^*,\overline{Y}]_p$ es un vector horizontal.

Sea Φ_t el flujo asociado al campo vectorial X^* en alguna vecindad de p, entonces

$$[X^*,\overline{Y}]_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((\dot{\Phi}_t)^{-1}\overline{Y}(\Phi_t(p)) - \overline{Y}(p) \right).$$

Ahora, este flujo está dado por

$$\Phi_t(q) = q \cdot exp(tX)$$

luego

$$\Phi_t^{-1}(q) = q \cdot exp(tX)^{-1} = R_{exp(tX)^{-1}}(q),$$

por lo tanto

$$\left(\dot{\Phi}_t^{-1}\right) \overline{Y}(\Phi_t(p)) = \left(dR_{exp(tX)^{-1}}\right) \overline{Y}(\Phi_t(p)).$$

De la G-invarianza de $\mathcal{H}$ se sigue $\left(dR_{exp(tX)^{-1}}\right) \overline{Y}(\Phi_t(p)) \in \mathcal{H}$, es decir, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\left(\dot{\Phi}_t^{-1}\right) \overline{Y}(\Phi_t(p))$ es un vector horizontal, lo cual implica que

$$\frac{1}{t}\left((\dot{\Phi}_t)^{-1}\overline{Y}(\Phi_t(p)) - \overline{Y}(p)\right)$$

es un vector horizontal para todo $t \neq 0$, pero como el límite exite y $\mathcal{H}_p$ es cerrado por ser finito dimensional, se sigue que

$$[X^*, \overline{Y}]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left((\dot{\Phi}_t)^{-1}\overline{Y}(\Phi_t(p)) - \overline{Y}(p)\right) \in \mathcal{H},$$

por lo tanto $\omega([X^*, \overline{Y}]_p) = \omega([X, Y]) = 0$.

□

1.7. Conexiones Planas

Definición 15. Decimos que una conexión $\mathcal{H}$ es plana si $\Omega = 0$, es decir, si $\Omega_p(X, Y) = 0$ para todo $p \in P$ y $X, Y \in T_pP$.

Teorema 1.19. *Una conexión $\mathcal{H}$ es plana si y sólo si $\mathcal{H}$ es integrable, es decir, si y sólo si $\mathcal{H}$ es cerrada bajo el corchete de Lie.*

Demostración. Por la proposición anterior sólo basta considerar el caso en que ambos vectores son horizontales.

Sean $X^h, Y^h \in \mathcal{H}_p$ y consideremos X y Y campos vectoriales horizontales en una vecindad de $p \in P$ tales que $X_p = X^h$ y $Y_p = Y^h$.

Entonces,

$$\begin{aligned}\Omega(X^h, Y^h) &= d\omega(X^h, Y^y) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \\ &= -\omega([X, Y]).\end{aligned}$$

Notemos que la ecuación antererior se hace cero, si y sólo si $[X, Y] \in ker(\omega)$, es decir, si y sólo si $[X, Y] \in \mathcal{H}$. En otras palabras, la curvatura es cero si y sólo si $\mathcal{H}$ es integrable.

□

Definición 16. Sea $\pi : P \to M$ un G-fibrado principal con M arco-conexo y sea $\mathcal{H}$ una conexión en P. Fijemos $p \in P$ tal que $\pi(p) = x_0$.

Definimos $P(p)$ como

$$P(p) := \{q \in P : \text{ existe una curva horizontal que une a } p \text{ y } q\ \}.$$

Proposición 1.20. *Sea $\pi : P \to M$ un G-fibrado principal con M arco-conexo, entonces*

$$\pi|_{P(p)} : P(p) \to M$$

es un fibrado principal con grupo estructural $\mathcal{K}_p$.

Demostración. Vamos a demostrar esto en los siguientes pasos:

Paso 1: Notemos que $P(p) \neq \emptyset$, pues claramente $p \in P(p)$.

Paso 2: Veamos que $P(p)$ es invariante bajo la acción de $\mathcal{K}_p \subseteq G$. Sea $q \in P(p)$ entonces existe una curva horizontal $\beta : [0,1] \to P$ tal que $\beta(0) = p$ y $\beta(1) = q$. Por otra parte, sea $g \in \mathcal{K}_p$, por lo tanto existe una curva suave $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0 = \pi(p)$ y tal que su único levantamiento horizontal $\widetilde{\gamma}$ que empieza en p, cumple que $\widetilde{\gamma}(1) = pg$.

Definamos $\beta_g(t) := \beta(t)g$, entonces β_g es un camino horizontal que empieza en pg y termina en qg.

Así, tomando $\alpha := \widetilde{\gamma} * \beta_g$ es un camino horizontal que empieza en $\widetilde{\gamma}(0) = p$ y termina en $\beta_g(1) = qg$, es decir $qg \in P(P)$, por lo tanto $P(p)$ es invariante bajo la acción de $\mathcal{K}_p$.

Paso 3: Veamos ahora que la acción de $\mathcal{K}_p$ es transitiva en las fibras de $P(p)$.

Sean $q, b \in P(p)$ tales que $\pi(q) = \pi(b) = x_1 \in M$. Como la acción de G es transitiva en las fibras de P, existe $g \in G$ tal que $b = q \cdot g$.

Por otra parte, como $q, b \in P(p)$ existen caminos horizontales α y β en P tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p$, $\alpha(1) = q$ y $\beta(1) = b = qg$, por lo tanto, si definimos γ como el camino $\gamma := \overline{\alpha} * \beta$, tenemos que γ es un camino horizontal tal que $\gamma(0) = q$ y $\gamma(1) = qg$.

De lo anterior, definiendo τ como $\tau := \alpha * \gamma * (\overline{\alpha} \cdot g)$ tenemos que τ es un camino horizontal tal que $\tau(0) = \alpha(0) = p$ y $\tau(1) = \overline{\alpha}(1) \cdot g = pg$, por lo tanto $g \in \mathcal{K}_p$, es decir, $\mathcal{K}_p$ es transitivo en las fibras de $P(p)$.

Paso 4: Como M es arco-conexo, dado $y \in M$ arbitrario, existe una curva suave α tal que $\alpha(0) = \pi(p)$ y $\alpha(1) = y$. Tomando $\widetilde{\alpha}$ el levantamiento horizontal de α que empieza en p, tenemos que $q := \widetilde{\alpha}(1) \in P(p)$ y $\pi(q) = y$, por lo tanto $\pi|_{P(p)} : P(p) \to M$ es sobreyectiva.

Paso 5: Existencia de secciones locales.

Sea $x \in M$ arbitrario, y sea (φ, U) una carta local al rededor de x tal que $\varphi(x) = 0$ y U es una vecindad cúbica dada por $(x_1, ..., x_n)$ tales que $|x_i| < \delta$, para un δ suficientemente pequeño.

Sin pérdida de generalidad supondremos que $U \subset \mathbb{R}^n$.

Sea $y \in U$, definimos $\alpha_y(t) := (1-t)x + ty$, para todo $t \in [0,1]$.

Fijemos $q \in P(p)$ tal que $\pi(q) = x$ y definamos $\sigma : U \to P$ como $\sigma(y)$ es el punto final del desplazamiento horizontal desde q a lo largo de la curva $\alpha_y(t)$. Entonces $\sigma : U \to P$ es una sección local tal que $\sigma(U) \subset P(p)$.

De los pasos anteriores se sigue que

$$\pi|_{P(p)} : P(p) \to M$$

es un fibrado principal con grupo estructural $\mathcal{K}_p$.

$\square$

Este fibrado se conoce como el fibrado de la holonomía.

Teorema 1.21. *Sea $\mathcal{H}$ una conexión del G-fibrado principal $\pi : P \to M$ y M arco-conexo. Fijemos $p \in P$ y sea Ω la curvatura de $\mathcal{H}$. Entonces el álgebra de Lie de $\mathcal{K}_p$ es la subálgebra de lie de $\mathfrak{g}$ generada por $\Omega_q(X,Y)$, con $q \in P(p)$ y X, Y vectores horizontales.*

Demostración. Sea $q \in P(p)$. Dado un vector horizontal $X \in T_qP$, entonces sabemos que existe una curva suave y horizontal α en P tal que $\alpha(0) = q$ y $\dot{\alpha}(0) = X$. Esto implica que α es una curva totalmente contenida en $P(p)$, por lo tanto $X \in T_qP(p)$.

De lo anterior, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $P = P(p)$, $G = K_p$ y $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de $\mathcal{K}_p$.

Definamos $\mathfrak{g}' = gen\{\Omega_q(X,Y) : q \in P(p) \;\; y \;\; X, Y \in \mathcal{H}_q\}$ y usando el hecho de que $R_g^*\Omega = Ad_{g^{-1}}\Omega$ para todo $g \in G$ veamos que $\mathfrak{g}' \subseteq \mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y por lo tanto es una subálgebra de $\mathfrak{g}$.

Sea $z \in \mathfrak{g}$ arbitrario y consideremos el flujo en G asociado a z, $\varphi : \mathbb{R} \times G \to G$, definido por $\varphi(t,g) = g \cdot exp(tz)$, por lo tanto, similar a como se hizo en el caso 3 de la proposición 1.18, tenemos que $(\dot{\varphi}_t) = \big(dR_{exp(tz)}\big)$.

Ahora, si $A = \Omega_q(X, Y)$, entonces

$$\begin{aligned}
[A, z] &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\dot{\varphi}_t(A) - A\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(dR_{exp(tz)}(A) - A\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(Ad_{exp(-tz)}(A) - A\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(R^*_{exp(-tz)}(\Omega_q(X, Y)) - \Omega_q(X, Y)\right). \ (\clubsuit)
\end{aligned}$$

Como $R^*_{exp(-tz)}(\Omega_q(X, Y)) = \Omega_{pexp(-tz)}(dR_{exp(-tz)}(X), dR_{exp(-tz)}(Y)) \in \mathfrak{g}'$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y además $\mathfrak{g}'$ es un espacio vectorial de dimensión finita, se sigue que $(\clubsuit) \in \mathfrak{g}'$, así $\mathfrak{g}'$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y por lo tanto una subálgebra.

Para cada $q \in P$ consideremos $S_q \subset T_qP$, el subespacio generado por $\mathcal{H}_q$ y $\mathfrak{g}'_q := \{A^*(q) : A \in \mathfrak{g}'\}$, donde A^* es el campo fundamental asociado a A, entonces $S := \sqcup S_q$ es una distribución de dimensión $n + r$, dónde $n = dim(\mathcal{H}_q) = dim(M)$ y $r = dim(\mathfrak{g}')$.

Sean $q \in P$ arbitrario, U un abierto trivializable alrededor de $y = \pi(q)$ y $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ su respectivo difeomorfismo. Sean $X_1, ..., X_n$ campos vectoriales linealmente independientes en U y para cada $i = 1, ..., n$ definimos

$$\hat{X}_i := \left(\varphi^{-1}(\ \_\ , 1_G)\right)_* (X_i) - \omega\left(\left(\varphi^{-1}(\ \_\ , 1_G)\right)_* (X_i)\right)$$

el cuál es un levantamiento horizontal para cada campo vectorial X_i.

Sean $\{A_1, ..., A_r\}$ una base para $\mathfrak{g}'$ y $A_1^*, ..., A_r^*$ los correspondientes campos fundamentales. Claramente $\{\hat{X}_1, ..., \hat{X}_n, A_1^*, ..., A_r^*\}$ es una base local para S, por lo tanto S es una distribución suave.

Para probar que S es involutiva basta ver que S es cerrada bajo el corchete de *Lie*.

Como $[A_i^*, A_j^*] = [A_i, A_j]^*$, entonces $[A_i^*, A_j^*] \in S$, pues $\mathfrak{g}'$ es un ideal de $\mathfrak{g}$.

Ya hemos visto que $[A_i^*, \hat{X}_j]$ es horizontal, por lo tanto $[A_i^*, \hat{X}_j] \in S$, para todo $\tilde{p} \in \pi^{-1}(U)$.

Finalmente, sea $A = \omega\left([\hat{X}_i, \hat{X}_j]\right) \in \mathfrak{g}$, entonces

$$A = \omega\left([\hat{X}_i, \hat{X}_j]\right) = -2\left(\Omega(\hat{X}_i, \hat{X}_j)\right) \in \mathfrak{g}',$$

es decir, la componente vertical de $[\hat{X}_i, \hat{X}_j]$ en $\tilde{p} \in P$ es igual a $A^*_{\tilde{p}} \in S_{\tilde{p}}$, entonces $[\hat{X}_i, \hat{X}_j] \in S$.

De lo anterior, S es una distribución involutiva.

Sea P_0 la variedad maximal de S en q, como para cualquier curva horizontal $\alpha(t)$ en P, tal que $\alpha(0) = q$, se tiene que $\alpha(t) \subset P_0$, entonces $P = P_0$.

Así,

$$dim\mathfrak{g} = dim(P) - n = dim(P_0) - n = dim\mathfrak{g}'.$$

Por lo tanto $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$. □

Del teorema anterior, si suponemos que la conexión $\mathcal{H}$ es plana, entonces $\mathcal{K}_p$ es un grupo de Lie cuya álgebra de Lie es generada por $\Omega_q(X,Y) = 0$, con $q \in P(p)$, es decir, $\mathcal{K}_p$ tiene álgebra de Lie trivial.

Como $\mathcal{K}_p^\circ$ es la componente conexa de la identidad de $\mathcal{K}_p$, entonces $\mathcal{K}_p^\circ$ es un grupo de Lie conexo con álgebra de Lie trivial y por lo tanto $\mathcal{K}_p^\circ = \{1_G\}$.

Corolario 1.22. *Sean $\pi : P \to M$ un G-fibrado principal y $\mathcal{H}$ una conexión plana en P. Si $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to M$ son curvas suaves en M tales que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1) = x_0$, y $\gamma_1 \simeq \gamma_2$, entonces*

$$g_{\gamma_1}(p) = g_{\gamma_2}(p).$$

Proposición 1.23. *Supongamos que $\pi : P \to M$ es un G-fibrado principal y $\mathcal{H}$ una conexión plana en P. Si fijamos $p \in P$, con $\pi(p) = x_0$ entonces*

$$\begin{aligned} \Phi_p : \pi_1(M, x_0) &\to G \\ [\gamma] &\mapsto g_\gamma^{-1}(p) \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos. Además, este homomorfismo no depende de p salvo conjugación, es decir,

$$\Phi_p = h\Phi_{ph}h^{-1}$$

para todo $h \in G$.

Demostración. Del corolario 1.22 se sigue inmediatamente que Φ_p está bien definido. Veamos ahora qué es un homomorfismo de grupos.

Sean $[\gamma], [\alpha] \in \pi(M, x_0)$, $\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}$ los levantamientos horizontales de γ y α que empiezan en p respectivamente, entonces $\tilde{\gamma} * R_{g_{\gamma(p)}}(\tilde{\alpha})$ es el levantamiento de $\gamma * \alpha$ que empieza en p, por lo tanto

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} * R_{g_{\gamma(p)}}(\tilde{\alpha})(1) &= R_{g_{\gamma(p)}}(\tilde{\alpha}(1)) \\ &= p \cdot g_\alpha(p) g_\gamma(p) \end{aligned}$$

y así $g_{\gamma*\alpha}(p) = g_\alpha(p) g_\gamma(p)$.

De lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi_p([\gamma]\cdot[\alpha]) &= \Phi_p([\gamma * \alpha]) \\ &= (g_\alpha(p) g_\gamma(p))^{-1} \\ &= g_\gamma(p)^{-1} g_\alpha(p)^{-1} \\ &= \Phi_p([\gamma]) \cdot \Phi_p([\alpha]). \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

Espacio Moduli

En este capítulo daremos la definición como conjunto del espacio moduli de conexiones de un G-fibrado principal y luego demostraremos que hay una biyección entre este espacio y el espacio de representaciones del grupo fundamental del espacio base en el grupo G. La anterior biyección nos permitirá dotar de una topología al espacio moduli.

2.1. Espacios de representaciones

Definición 17. Sea π un grupo finitamente generado y G un grupo de Lie. Denotamos el conjunto de homomorfismos de grupos de π a G como $Hom(\pi, G)$.

Sea F_n es grupo libre con n generadores $\{x_1, ..., x_n\}$. Entonces tenemos los siguientes mapeos evaluación:

$$\begin{aligned} E : Hom(F_n, G) &\longrightarrow G^n \\ E(f) &\mapsto (f(x_1), ..., f(x_n)), \\ e : G^n &\longrightarrow Hom(F_n, G) \\ (g_1, ..., g_n) &\longmapsto f; \end{aligned}$$

donde f es el homomorfismo tal que $f(x_i) = g_i$.

Notemos que $e \circ E$ y $E \circ e$ son ambos el mapeo identidad, por lo tanto estos mapeos son invertibles. De lo anterior, podemos identificar a $Hom(F_n, G)$ con G^n y de esta manera dotar a $Hom(F_n, G)$ de una topología tal que E y e sean homeomorfismos.

Por otra parte, si Γ y π son grupos para los cuales tenemos un homomorfismo sobreyectivo $p : \Gamma \to \pi$, entonces esto induce una inclusión

$$p^* : Hom(\pi, G) \hookrightarrow Hom(\Gamma, G),$$

la cuál está dada al componer con p, es decir, si $f \in Hom(\pi, G)$, entonces $p^*(f) = f \circ p$.

En particular, si π es un grupo finitamente generado, existe un homomorfismo sobreyectivo $p_n : F_n \to \pi$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tal que la imagen del conjunto generador de F_n bajo este homomorfismo es un conjunto generador de π. Entonces, de la observación anterior, tenemos una inclusión

$$Hom(\pi, G) \hookrightarrow Hom(F_n, G) \cong G^n.$$

Por lo tanto podemos dotar a $Hom(\pi, G)$ con la topología subespacio heredada de G^n. Es decir, la topología de $Hom(\pi, G)$ es tal que p_n es un homeomorfismo a su imagen en G^n.

Proposición 2.1. *La topología de $Hom(\pi, G)$ descrita anteriormente no depende de la elección de los generadores.*

Demostración. Sean $\{a_1, ..., a_n\}$ y $\{b_1, ..., b_m\}$ dos conjuntos generadores de π. Definamos $A := Hom(\pi, G)$ con la topología subespacio heredada de G^n usando $\{a_1, ..., a_n\}$ y $B := Hom(\pi, G)$ con la topología heredada de G^m usando $\{b_1, ..., b_m\}$. Notemos que como conjuntos $A = B$.

Como $\{a_1, ..., a_n\}$ generan a π, entonces para cada $j = 1, ..., m$, podemos expresar a b_j como

$$b_j = f_j(a_1, ..., a_n),$$

así, podemos definir $f : G^n \to G^m$ como $f = (f_1, ..., f_m)$, donde $f_j(g_1, ..., g_n)$ es un producto de los g_i y sus inversos.

Notemos que f es una función suave ya que G es un grupo de Lie, por lo tanto es continua. Por otra parte, como A tiene la topología subespacio de G^n, la restricción de f a $A \subset G^n$ es continua, y además, como $f(a_1, ..., a_n) = (b_1, ..., b_m)$, entonces

$$f\big|_A = Id_A : A \to B.$$

Intercambiando A y B en el razonamiento anterior, concluimos que

$$f\big|_B = Id_B : B \to A$$

es una función continua. Por lo tanto, A y B tienen la misma topología. □

Definición 18. Sea π un grupo y G un grupo de Lie. Entonces G actúa en $Hom(\pi, G)$ por conjugación, es decir, si $f : \pi \to G$ es un homomorfismo y $g \in G$, entonces $g \cdot f : \pi \to G$ está definido por

$$(g \cdot f)(x) := g f(x) g^{-1}$$

para todo $x \in \pi$. Entonces denotamos el espacio de órbitas bajo esta acción como

$$Rep(\pi, G) := Hom(\pi, G)/G.$$

Este espacio es llamado el espacio de representaciones de π en G.

2.2. Construcción del Espacio Moduli

Definición 19. Sean $\pi : P \to M$ y $\widetilde{\pi} : Q \to M$ dos G-fibrados principales con conexiones $\mathcal{H}^P$ y $\mathcal{H}^Q$ respectivamente. Decimos que estos fibrados son *gauge equivalentes* si existe un morfismo de fibrados $f : P \to Q$ tal que $df_p(\mathcal{H}^P_p) = \mathcal{H}^Q_{f(p)}$ para todo $p \in P$.

Si ω^P y ω^Q son las formas conexión de $\mathcal{H}^P$ y $\mathcal{H}^Q$ respectivamente, lo anterior es equivalente a decir que

$$\omega^P = f^*(\omega^Q).$$

Lo anterior define una relación de equivalencia en los G-fibrados principales con conexión.

Definición 20. Sea G un grupo de Lie y M una variedad suave y conexa. El espacio moduli de conexiones planas en G-fibrados principales se define como conjunto como

$$\mathcal{M}(M, G) := \{(\pi : P \to M, \mathcal{H})\}/\sim$$

donde $\pi : P \to M$ es un G-fibrado principal con conexión plana $\mathcal{H}$, y $\sim$ es la relación de equivalencia gauge.

De manera informal, el conjunto $\mathcal{M}(M, G)$ es un conjunto que parametriza todas las conexiones planas en G-fibrados principales sobre M salvo equivalencia gauge.

Definición 21. Supongamos que $\pi : P \to M$ es un G-fibrado principal con una conexión plana $\mathcal{H}$. Fijemos $x_0 \in M$ y $p \in P$ tales que $\pi(p) = x_0$. Definimos la holonomía de γ respecto a $\mathcal{H}$ en p como

$$Hol_p(\mathcal{H}, \gamma) := g_\gamma(p).$$

Del teorema 1.23, dado un G-fibrado principal $\pi : P \to M$ con una conexión plana $\mathcal{H}$ y $p \in P$ fijo, tenemos un homomorfismo de grupos, definido por

$$\begin{aligned} \Psi(P, \mathcal{H}, M, p) : \pi_1(M) &\to G \\ [\gamma] &\mapsto Hol_p(\mathcal{H}, \gamma)^{-1}. \end{aligned}$$

Además este homomorfismo no depende de la elección de p salvo conjugación, por lo tanto si consideramos $\overline{\Psi(P, \mathcal{H}, M, p)} \in Hom(\pi_1(M), G)/G =: Rep(\pi_1(M), G)$, podemos escribir simplemente $\overline{\Psi(P, \mathcal{H})}$.

Teorema 2.2. *Sea G un grupo de Lie compacto y M una variedad suave arcoconexa. El mapeo $\overline{\Psi}$ definido por*

$$\begin{aligned}\overline{\Psi} :&\mathcal{M}(M,G) \longrightarrow Rep(\pi_1(M),G)\\ &[(\pi : P \to M, \mathcal{H})] \mapsto \overline{\Psi(P,\mathcal{H})}\end{aligned}$$

es una biyección.

Demostración. Primero veamos que $\overline{\Psi}$ esta bien definida, es decir, supongamos que $\pi : P \to M$ y $\widetilde{\pi} : Q \to M$ son dos G-fibrados principales con conexiones $\mathcal{H}^A$ y $\mathcal{H}^B$ respectivamente, que son gauge equivalentes, veamos que $\overline{\Psi(P, A^B)} = \overline{\Psi(Q, \mathcal{H}^B)}$.

Sean $f : P \to Q$ una equivalencia gauge, $p \in P$, $q = f(p) \in Q$ y $x \in M$ tales que $\pi(p) = x$. Por otra parte, sean $\gamma : [0,1] \to M$ una curva suave en M tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to P$ el levantamiento horizontal de γ que empieza en p, por lo tanto $\widetilde{\gamma}(1) = p \cdot Hol_p(\mathcal{H}^A, \gamma)$.

Sea $\beta : [0,1] \to Q$ la función $\beta := f \circ \widetilde{\gamma}$, entonces como f es una equivalencia gauge y $\widetilde{\gamma}$ es horizontal, entonces β es un camino horizontal, además $\beta(0) = f(p) = q$ y $\widetilde{\pi}(\beta) = \gamma$, es decir, β es el levantamiento horizontal de γ en Q que empieza en $f(p) = q$, por lo tanto $\beta(1) = q \cdot Hol_q(\mathcal{H}^B, \gamma)$, luego

$$\begin{aligned}\beta(1) :&= f(\widetilde{\gamma}(1))\\ &= f(p \cdot Hol_p(\mathcal{H}^A, \gamma))\\ &= f(p) \cdot Hol_p(\mathcal{H}^A, \gamma)\\ q \cdot Hol_q(\mathcal{H}^B, \gamma) &= q \cdot Hol_p(\mathcal{H}^A, \gamma).\end{aligned}$$

Como la acción de G en Q es libre, entonces $Hol_p(\mathcal{H}^A, \gamma) = Hol_q(\mathcal{H}^B, \gamma)$, y así $\overline{\Psi(P, M)} = \overline{\Psi(Q, M)}$.

De lo anterior concluimos que $\overline{\Psi}$ está bien definida.

Para ver que $\overline{\Psi}$ es inyectiva supongamos que $(\pi : P \to M, \mathcal{H}^A)$ y $(\widetilde{\pi} : Q \to M, \mathcal{H}^B)$ son dos G-fibrados principales con conexiones planas $\mathcal{H}^A$ y $\mathcal{H}^B$ respectivamente tales que

$$\overline{\Psi(P, \mathcal{H}^A)} = \overline{\Psi(Q, \mathcal{H}^B)}.$$

Fijemos $p \in P$, $q \in Q$ y $x \in M$ tales que $\pi(p) = x = \pi(q)$ y veamos que existe una equivalencia gauge $F : P \to Q$.

Como $\overline{\Psi(P, \mathcal{H}^A)} = \overline{\Psi(Q, \mathcal{H}^B)}$, existe $g \in G$ tal que

$$\Psi(P, \mathcal{H}^A, M, p) = g\Psi(Q, \mathcal{H}^B, M, q)g^{-1},$$

pero eligiendo a $q \in Q$ apropiadamente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\Psi(P, \mathcal{H}^A, M, p) = \Psi(Q, \mathcal{H}^B, M, q),$$

es decir, $Hol_q(\mathcal{H}^B, \gamma) = Hol_p(\mathcal{H}^A, \gamma)$ para toda curva $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, más aún, esto implica que $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_q$, por lo tanto de ahora en adelante escribiremos simplemente $\mathcal{K}$.

Dado $y \in M$, como M es arco-conexo existe una curva suave $\alpha : [0,1] \to M$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$ y consideremos $\widetilde{\alpha}$ el levantamiento horizontal de α en P que empieza en p y $\widehat{\alpha}$ el levantamiento horizontal de α en Q que empieza en q.

Definamos $f : P(p) \to Q(q)$ como $f(\widetilde{\alpha}(1)) = \widehat{\alpha}(1)$, y veamos que f es una biyección $\mathcal{K}$-equivariante.

Paso 1: f está bien definida. En efecto, supongamos que α es una curva tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$, y sea $h \in \mathcal{K}$ arbitrario, entonces existe una curva horizontal $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to P$ tal que $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\alpha}(1)$ y $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\alpha}(1) \cdot h$. Así, si definimos $\gamma := \pi(\widetilde{\gamma})$, tenemos que $\widetilde{\alpha} * \widetilde{\gamma} * R_h(\overline{\widetilde{\alpha}})$ es el levantamiento horizontal de $\alpha * \gamma * \overline{\alpha}$ en P que empieza en p y termina en $R_h(\overline{\widetilde{\alpha}})(1) = p \cdot h$, es decir, $h = Hol_p(\mathcal{H}^A, \alpha * \gamma * \overline{\alpha})$.

Por otra parte, sea $\widehat{\gamma}$ el levantamiento de γ que empieza en $\widehat{\alpha}(1)$, entonces $\widehat{\gamma}(1) = \widehat{\alpha}(1) \cdot \widehat{h}$, para algún $\widehat{h} \in \mathcal{K}$, así, $\widehat{\alpha} * \widehat{\gamma} * R_{\widehat{h}}(\overline{\widehat{\alpha}})$ es el levantamiento horizontal de $\alpha*\gamma*\overline{\alpha}$ en Q que empieza en q, y $\widehat{\alpha}*\widehat{\gamma}*R_{\widehat{h}}(\overline{\widehat{\alpha}})(1) = q \cdot \widehat{h}$ y así $\widehat{h} = Hol_q(\mathcal{H}^B, \alpha*\gamma*\overline{\alpha})$.

De lo anterior, se sigue que $h = \widehat{h}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\alpha}(1) \cdot h) &= f(\widetilde{\alpha} * \widetilde{\gamma}(1)) = \widehat{\alpha} * \widehat{\gamma}(1) = \widehat{\alpha}(1) \cdot \widehat{h} \\ &= \widehat{\alpha}(1) \cdot h = f(\widetilde{\alpha}(1)) \cdot h. \end{aligned}$$

De lo anterior, se sigue que f es $\mathcal{K}$-equivariante.

Ahora, si $\alpha, \beta : [0,1] \to M$ son dos curvas suaves tales que $\beta(0) = \alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = \beta(1) = y$, consideremos la curva suave $\overline{\alpha} * \beta$.

Si $\widetilde{\overline{\alpha} * \beta}$ es el levantamiento horizontal de $\overline{\alpha}*\beta$ que empieza en $\widetilde{\alpha}(1)$, por definición tenemos que $\widetilde{\overline{\alpha} * \beta}(1) = \widetilde{\alpha}(1) \cdot Hol_{\widetilde{\alpha}(1)}(\overline{\alpha} * \beta)$, es decir,

$$\widetilde{\beta}(1) = \widetilde{\alpha}(1) \cdot Hol_{\widetilde{\alpha}(1)}(\overline{\alpha} * \beta).$$

Por simplicidad, sea $h := Hol_{\widetilde{\alpha}(1)}(\overline{\alpha} * \beta)$.

Sea $\widetilde{\beta} * R_h(\overline{\widetilde{\alpha}})$, entonces de lo anterior esta curva es continua, más aún, es el levantamiento horizontal de $\beta * \overline{\alpha}$ que empieza en p, por lo tanto

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta * \overline{\alpha}}(1) &= \widetilde{\beta} * R_h(\overline{\widetilde{\alpha}})(1) \\ &= R_h(\overline{\widetilde{\alpha}}(1)) \\ &= R_h(\widetilde{\alpha}(0)) \\ p \cdot Hol_p(\beta * \overline{\alpha}) &= p \cdot Hol_{\widetilde{\alpha}(1)}(\overline{\alpha} * \beta) \end{aligned}$$

y como la acción es libre, se sigue que $Hol_p(\beta * \overline{\alpha}) = Hol_{\widetilde{\alpha}(1)}(\overline{\alpha} * \beta)$.

Así,

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\beta}(1)) &= f(\widetilde{\alpha}(1) \cdot Hol_{\widetilde{\alpha}(1)}(\overline{\alpha} * \beta)) \\ &= f(\widetilde{\alpha}(1)) \cdot Hol_{\widetilde{\alpha}(1)}(\overline{\alpha} * \beta) \\ &= f(\widetilde{\alpha}(1)) \cdot Hol_p(\beta * \overline{\alpha}) \\ &= \widehat{\alpha}(1) \cdot Hol_q(\beta * \overline{\alpha}) \\ &= \widehat{\beta}(1). \end{aligned}$$

Por lo tanto f no depende de la elección del camino en M, es decir, f está bien definida.

Paso 2: f es un isomorfismo de espacios recubridores. Claramente $f : P(p) \to Q(q)$ es sobreyectiva. Como la acción de $\mathcal{K}$ en $P(p)$ y $Q(q)$ es libre y f es $\mathcal{K}$-equivariante, se sigue que f es inyectiva, por lo tanto una biyección.

Por otra parte, como las conexiones $\mathcal{H}^A$ y $\mathcal{H}^B$ son planas, tenemos que $T_e\mathcal{K} = \{0\}$, por lo tanto $\mathcal{K}$ es un grupo discreto, y así $\pi|_{P(p)} : P(p) \to M$ y $\widetilde{\pi}|_{Q(q)} : Q(q) \to M$ son espacios recubridores. Ahora, notemos que $f \circ \widetilde{\pi} = \pi$, esto implica que localmente f es la compuesta de difeomorfismos, por lo tanto f es un difeormormisfo $\mathcal{K}$-equivariante, es decir, un isomoforfismo de espacios recubridores.

Ahora extendamos f a todo P.

Consideremos el espacio $P(p) \times G$. $\mathcal{K}$ actúa suave y libremente en $P(p) \times G$ de la siguente manera: si $(\widetilde{p}, g) \in P(p) \times G$ y $h \in \mathcal{K}$, entonces

$$(\widetilde{p}, g) \cdot h = (\widetilde{p}h, h^{-1}g).$$

Como G es compacto, entonces $\mathcal{K}$ es finito, por lo tanto la acción de $\mathcal{K}$ en $P(p)\times G$ es propia, ya que es propiamente discontinua, así, por el teorema de la variedad cociente, teorema 21,10 [Lee03], se sigue que $P(p) \times_{\mathcal{K}} G$ tiene una única estructura de variedad suave tal que la proyección

$$\overline{\pi} : P(p) \times G \to P(p) \times_{\mathcal{K}} G$$

es una submersión suave, y además

$$dim(P(p) \times_{\mathcal{K}} G) = dim(P(p) \times G) - dim(\mathcal{K}) = dim(P(p) \times G).$$

Definamos $R : P(p) \times G \to P$ como $R(x, g) = x \cdot g$, entonces $R = \widetilde{R} \circ (i \times Id_G)$, donde $i : P(p) \hookrightarrow P$ es la función inclusión, la cuál es un embebimiento y $\widetilde{R}$ es la acción de G en P, por lo tanto R es una función suave.

Sea $z \in P$, entonces $R^{-1}(z) = \{(zg, g^{-1}) \mid zg \in P(p)\}$, además si $h \in \mathcal{K}$, entonces

$$\begin{aligned} R((zg, g^{-1})h) &= R((z \cdot gh, h^{-1}g^{-1})) = z \cdot gh \cdot h^{-1}g^{-1} \\ &= z \cdot gg^{-1} = z = R((zg, g^{-1})) \end{aligned}$$

es decir, R es constante en las fibras de $\overline{\pi} : P(p) \times G \to P(p) \times_{\mathcal{K}} G$.

Sean $(zg_1, g_1^1), (zg_2, g_2^{-1}) \in R^{-1}(z)$, entonces $zg_1, zg_2 \in P(p)$, y como la acción de $\mathcal{K}$ en P es transitiva en las fibras, se sigue que existe $h \in \mathcal{K}$ tal que $zg_1 = zg_2h$. Así, como la acción es libre, entonces $g_1 = g_2h$, luego

$$\begin{aligned} (zg_1, g_1^{-1}) &= (zg_2h, (g_2h)^{-1}) \\ &= (zg_2h, h^{-1}g_2^{-1}) \\ &= (zg_2, g_2^{-1}) \cdot h. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{\pi}$ es constante en las fibras de R.

Veamos ahora que R es una submersión sobreyectiva. En efecto, R es sobreyectiva porque la acción de G en P es transitiva en las fibras de $\pi : P \to M$.

Para ver que es una submersión, construyamos secciones locales para R.

Por simplicidad escribamos $\pi\big|_{P(p)} = \pi_p$. Sean $x \in P$ arbitrario y $U \subseteq M$ un abierto tal que $\pi(x) \in U$ y para el cual existen trivializaciones locales

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &: (\pi_p)^{-1}(U) \subseteq P(p) \to U \times \mathcal{K} \\ \psi_\beta &: \pi^{-1}(U) \subseteq P \to U \times G. \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned} S_x : \pi^{-1}(U) \subseteq P &\longrightarrow \pi_p^{-1}(U) \times G \subseteq P(p) \times G \\ x &\mapsto (S_\alpha(\pi(x)), g_\beta^{-1}(S_\alpha(\pi(x)) \cdot g_\beta(x)). \end{aligned}$$

Notemos que S_x es una función suave pues cada una de sus componentes es la composición de funciones suaves. Para ver que en efecto es una sección de R, sea $y \in \pi^{-1}(U)$ y notemos que y y $S_\alpha(\pi(y))$ están en la misma fibra de π, por lo tanto existe $h \in G$ tal que $S_\alpha(\pi(y)) = yh$. Recordemos que $g_\beta := \pi_G \circ \psi_\beta$ y es G-equivariante, así

$$\begin{aligned} R \circ S_x(y) &= R\left(S_\alpha(\pi(y)), g_\beta^{-1}(S_\alpha(\pi(y)) \cdot g_\beta(y)\right) \\ &= S_\alpha(\pi(y)) \cdot g_\beta^{-1}(S_\alpha(\pi(y)) \cdot g_\beta(y) \\ &= (yh)(g_\beta^{-1}(yh))(g_\beta(y)) \\ &= yh(h^{-1}g_\beta^{-1}(y))g_\beta(y) \\ &= yhh^{-1}g_\beta^{-1}(y)g_\beta(y) \\ &= y. \end{aligned}$$

Por lo tanto R es una submersión suave.

De lo anterior, usando nuevamente el teorema del variedad cociente, teorema 21,10 [Lee03], tenemos un difeomorfismo

$$\overline{R}_P : P(p) \times_{\mathcal{K}} G \longrightarrow P$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} P(p) \times G \arrow[d, "\overline{\pi}"'] \arrow[dr, "R"] & \\ P(p) \times_{\mathcal{K}} G \arrow[r, "\overline{R}_P"'] & P. \end{tikzcd}$$

Análogamente podemos encontrar un difeomorfismo

$$\overline{R}_Q : Q(q) \times_{\mathcal{K}} G \longrightarrow Q.$$

Consideremos el siguiente diagrama con las funciones definidas anteriormente

$$\begin{tikzcd} P(p) \times G \arrow[r, "f \times Id_G"] \arrow[d, "\overline{\pi}_1"'] \arrow[dr, dashed, "\overline{\pi}_2 \circ (f \times Id_G)"] & Q(q) \times G \arrow[d, "\overline{\pi}_2"] \\ P(p) \times_{\mathcal{K}} G \arrow[r, "f \times_{\mathcal{K}} Id_G"] & Q(q) \times_{\mathcal{K}} G. \end{tikzcd}$$

Ahora, como f es un difeomorfismo, se sigue que $f \times Id_G$ es un difeomorfismo, en particular una submersión, por lo tanto $\overline{\pi}_2 \circ (f \times Id_G)$ es una submersión sobreyectiva, además esta submersión es constante en las fibras de $\overline{\pi}_1$ y viceversa.

Usando nuevamente el teorema de la variedad cociente, teorema 21,10 [Lee03], tenemos que $f \times Id_G$ induce un difeomorfismo $f \times_{\mathcal{K}} Id_G : P(p) \times_{\mathcal{K}} G \longrightarrow Q(q) \times_{\mathcal{K}} G$ que hace conmutar el anterior diagrama.

Ahora definamos $F : P \to Q$ usando los difeomorfismos $\overline{R}_Q$, $\overline{R}_P$ y $f \times_{\mathcal{K}} Id_G$ como

$$F := \overline{R}_Q \circ (f \times_{\mathcal{K}} Id_G) \circ \overline{R}_P^{-1}.$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\overline{R}_P^{-1}"'] & Q \\
P(p) \times_{\mathcal{K}} G \arrow[r, "f \times_{\mathcal{K}} Id_G"] & Q(q) \times_{\mathcal{K}} G. \arrow[u, "\overline{R}_Q"']
\end{tikzcd}$$

F es un difeomorfismo G-equivariante pues $\overline{R}_Q$, $\overline{R}_P$ y $f \times_{\mathcal{K}} Id_G$ lo son. Además, si $x \in P$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \overline{R}_Q \circ (f \times_{\mathcal{K}} Id_G) \circ \overline{R}_P^{-1}(x) \\
&= \overline{R}_Q \circ (f \times_{\mathcal{K}} Id_G)\left([xg, g^{-1}]\right) \\
&= \overline{R}_Q([f(xg), g^{-1}]) \\
&= f(xg) \cdot g^{-1}.
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Q \arrow[dl, "\widetilde{\pi}"] \\
& M. &
\end{tikzcd}$$

Es decir, F es un isomormismo de G-fibrados principales.

Además, si $x \in P(p)$, entonces $\overline{R}_P^{-1}(x) = [x, e]$, por lo tanto $F\big|_{P(p)} = f$, esto implica que $dF(\mathcal{H}^A) = \mathcal{H}^B$, es decir, F es una equivalencia gauge.

Concluimos que $\overline{\Psi}$ es inyectiva.

Finalmente, para ver que $\overline{\Psi}$ es sobreyectiva, sea $\varphi : \pi(M) \to G$ un homomorfismo de grupos y sea $C : \widetilde{M} \to M$ la cubierta universal de M.

$\pi_1(M)$ actúa a la izquierda en M vía transformaciones de deck, por lo tanto, si $[\alpha] \in \pi_1(M)$, entonces existe una única transformación de deck f_α tal que para todo $p \in \widetilde{M}$ se tiene que $[\alpha] \cdot p = f_\alpha(p)$.

$\pi_1(M)$ también actúa en G vía ϕ, por lo tanto, $\pi_1(M)$ actúa en $\widetilde{M} \times G$ de la siguiente manera: Dados $[\alpha] \in \pi_1(M)$ y $(p, g) \in \widetilde{M} \times G$,

$$[\alpha] \cdot (p, g) := (f_\alpha(p), \varphi([\alpha])g).$$

Esta acción es libre y propia, por lo tanto, del teorema de la variedad cociente, tenemos que $\widetilde{M} \times_{\pi_1(M)} G$ tiene una única estructura de variedad suave tal que

$$\overline{\pi} : \widetilde{M} \times G \longrightarrow \widetilde{M} \times_{\pi_1(M)} G$$

es una submersión suave y

$$\begin{aligned} dim\left(\widetilde{M} \times_{\pi_1(M)} G\right) &= dim(\widetilde{M} \times G) - dim(\pi_1(M)) \\ &= dim(\widetilde{M} \times G) \\ &= dim(\widetilde{M}) + dim(G). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{\pi}$ es un difeomorfismo local.

Definamos $P := \widetilde{M} \times_{\pi_1(M)} G$ y consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \times G \arrow[r, "\pi_{\widetilde{M}}"] \arrow[d, "\overline{\pi}"'] \arrow[dr, dashed, "C \circ \pi_{\widetilde{M}}"] & \widetilde{M} \arrow[d, "C"] \\ P \arrow[r, "\pi"] & M. \end{tikzcd}$$

Como C y $\pi_{\widetilde{M}}$ son submersiones sobreyectivas, entonces $C \circ \pi_{\widetilde{M}}$ también lo es, además es constante en las fibras de $\overline{\pi}$, por lo tanto existe una submersión $\pi : P \longrightarrow M$ que hace conmutar el anterior diagrama.

Sea $p = [\widetilde{x}, g] \in P$, con $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ y $g \in G$, entonces

$$\pi(p) = C \circ \pi_{\widetilde{M}}((\widetilde{x}, g)) = C(\widetilde{x}).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \pi : P := \widetilde{M} \times_{\pi_1(M)} G &\longrightarrow M \\ [\widetilde{x}, g] &\mapsto C(\widetilde{x}). \end{aligned}$$

Definamos ahora una acción de G en P. Dado $h \in G$ y $[\widetilde{x}, g] \in P$, entonces

$$[\widetilde{x}, g] \cdot h := [\widetilde{x}, gh].$$

Si $[\widetilde{x}, g_1] = [\widetilde{y}, g_2]$, existe $[\alpha] \in \pi_1(M)$ tal que $\widetilde{y} = f_\alpha(\widetilde{x})$ y $g_2 = \varphi([\alpha])g_1$, luego

$$\begin{aligned}[\widetilde{y}, g_2]h &= [\widetilde{y}, g_2 h]\\ &= [f_\alpha(\widetilde{x}), \varphi([\alpha])g_1 h]\\ &= [f_\alpha(\widetilde{x}), \varphi([\alpha])g_1]h\\ &= [\widetilde{x}, g_1]h.\end{aligned}$$

Entonces la acción está bien definida.

Para ver que es libre y transitiva en las fibras de π, supongamos que $\pi([\widetilde{x}, g]) = \pi([\widetilde{y}, h])$, entonces existe $[\gamma] \in \pi_1(M)$ tal que $\widetilde{y} = [\gamma]\widetilde{x}$, definamos $\widetilde{g} := g^{-1}[\gamma]^{-1} \cdot h \in G$, luego

$$\begin{aligned}[\widetilde{x}, g]\widetilde{g} &= [\widetilde{x}, g\widetilde{g}]\\ &= [\widetilde{x}, gg^{-1}[\gamma]^{-1} \cdot h]\\ &= [\widetilde{x}, [\gamma]^{-1} \cdot h]\\ &= [[\gamma]\widetilde{x}, h]\\ &= [y, h].\end{aligned}$$

Entonces la acción es transitiva. Para ver que es libre notemos que si $k \in G$ es tal que $[\widetilde{x}, g]k = [\widetilde{x}, g]$, de lo anterior tenemos que $[\gamma] = [1_{\pi_1(M)}]$ y $h = g$, por lo tanto $k = 1_G$.

Por otra parte, esta acción es suave, pues es la acción inducida por la acción de G en $\widetilde{M} \times G$.

Sea $U \subseteq M$ un abierto regularmente cubierto de M, es decir

$$C^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in \Delta(\widetilde{M})} U_\alpha,$$

tal que

$$C\big|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$$

es un difeomorfismo.

Fijemos $\alpha \in \Delta(\widetilde{M})$, entonces para cada U_β existe una única $\beta \in \Delta(\widetilde{M})$ tal que $f_\beta^{-1}(U_\beta) = U_\alpha$.

Nota 7. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que f_β es la transformación de deck correspondiente a $[\beta] \in \pi_1(M)$.

Definamos $\phi : C^{-1}(U) \times G \longrightarrow U \times G$ de la siguiente manera: dados $(\widetilde{x}_\beta, g) \in U_\beta \times G$, entonces

$$\phi(\widetilde{x}_\beta, g) = (C(\widetilde{x}_\beta), [\beta]^{-1}g).$$

Claramente ϕ es una función suave, pues es suave en cada componente conexa, $U_\beta \times G$, de $C^{-1}(U) \times G$, y además es sobreyectiva.

Por otra parte, si definimos $S : U \times G \longrightarrow C^{-1}(U) \times G$ como

$$S := \left(C\big|_{U_\alpha}\right)^{-1} \times L_{\varphi([\alpha])},$$

tenemos que S es una sección suave de ϕ, por lo tanto ϕ es una submersión suave sobreyectiva.

Ahora, sean $(\widetilde{x}_\beta, g), (\widetilde{x}_\gamma, h) \in C^{-1}(U) \times G$ tales que

$$[\widetilde{x}_\beta, g] = [\widetilde{x}_\gamma, h] \in C^{-1}(U) \times_{\pi_1(\widetilde{M})} G = \pi^{-1}(U).$$

Entonces $\widetilde{x}_\beta = f_\beta \circ (f_\gamma)^{-1}(\widetilde{x}_\gamma) = f_{\overline{\beta} * \gamma}(\widetilde{x}_\gamma)$, por lo tanto $g = [\overline{\beta} * \gamma] \cdot h$, de donde $[\beta]g = [\gamma]h$.

De lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(\widetilde{x}_\beta, g) :&= (C(\widetilde{x}_\beta), [\beta]g) \\ &= (C(\widetilde{x}_\gamma), [\gamma]h) \\ &= \phi(\widetilde{x}_\gamma, h), \end{aligned}$$

es decir, ϕ es constante en las fibras de π.

Por el teorema de la variedad cociente, ϕ induce una submersión suave y sobreyectiva $\overline{\phi} : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} C^{-1}(U) \times G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\overline{\phi}"'] & U \times G. \end{tikzcd}$$

Además,

$$\begin{aligned} dim(\pi^{-1}(U)) &= dim(P) \\ &= dim(\widetilde{M}) + dim(G) \\ &= dim(U) + dim(G), \end{aligned}$$

por lo tanto $\overline{\phi}$ es un difeomorfismo.

Por otra parte, como ϕ es G-equivariante trivialmente, entonces $\overline{\phi}$ es G-equivariante. De lo anterior, concluimos que $\overline{\phi}$ es una trivialización local de $\pi : P \to M$, y así P es un G-fibrado principal sobre M.

Definamos una conexión en $\widetilde{M} \times G$ tomando $\widetilde{\mathcal{H}} = T\widetilde{M} \times \{0\}$. Cómo los mapeos inducidos por la acción de $\pi_1(M)$ en $\widetilde{M} \times G$ envía vectores horizontales en horizontales, entonces podemos descender la noción *horizontabilidad* al cociente P. Esto define los vectores horizontales $\mathcal{H}$ en P, por lo tanto nos determina una conexión en P.

Supongamos que $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathcal{H}$, y $X, Y \in \widetilde{\mathcal{H}}$ son tales que $d\pi(X) = \overline{X}$ y $d\pi(Y) = \overline{Y}$. Por la naturalidad del bracket de Lie tenemos que $[\overline{X}, \overline{Y}] = d\pi([X, Y]) =: \overline{[X, Y]}$.

Sean ω y Ω la forma conexión y la curvatura P respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \Omega(\overline{X}, \overline{Y}) &= -\omega([\overline{X}, \overline{Y}]) \\ &= -\omega(\overline{[X, Y]}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la conexión definida en P es plana.

Por último fijemos $p = [\widetilde{x}, e] \in P$, $x = C(\widetilde{x}) \in M$, y veamos que $\Psi_{(P,p,M,\mathcal{H})}([\alpha]) = Hol_p([\gamma])^{-1}$.

Sean $[\alpha] \in \pi_1(M, x)$ y $\widetilde{\alpha}$ el levantamiento horizontal de α en $\widetilde{M}$ que empieza en $\widetilde{x}$, entonces $\widehat{\alpha}(t) = [\widetilde{\alpha}(t), e]$ es el levantamiento horizontal de α en P que empieza en p.

Ahora,

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}(1) &= [\widetilde{\alpha}(1), e] = [[\alpha]\widetilde{x}, e] = [\widetilde{x}, \varphi([\alpha])^{-1}e] \\ &= [\widetilde{x}, e]\varphi([\alpha])^{-1} = p\varphi([\alpha])^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto $Hol_p(\mathcal{H}, \alpha) = \varphi([\alpha])^{-1}$, y así tenemos que $\overline{\Psi}$ es sobreyectiva.

Concluimos entonces que

$$\begin{aligned} \overline{\Psi} :& \mu(M, G) \longrightarrow Rep(\pi_1(M), G) \\ & [(\pi : P \to M, \mathcal{H})] \mapsto \overline{\Psi(P, \mathcal{H})} \end{aligned}$$

es una biyección.

$\square$

Utilizando la anterior biyección podemos dotar a $\mathcal{M}(M, G)$ con una topología de tal forma que $\overline{\Psi}$ es un homemomorfismo.

El conjunto $\mathcal{M}(M, G)$ con esta topología es el espacio moduli de conexiones planas en G-fibrados principales sobre M.

Capítulo 3

Espacios de Representaciones

Finalmente queremos calcular de manera explícita el espacio de representaciones de algunos G-fibrados principales, cuando G es $U(m)$ ó $Sp(m)$. Para esto usaremos los toros maximales y el grupo de Weyl del grupo G, y la teoría de productos simétricos.

Además, usando algunas herramientas de combinatoria calcularemos el espacio moduli de conexiones planas en G-fibrados principales para todas las variedades compactas y con grupo fundamental abeliano, lo cual es una nueva contribución de este trabajo.

Definición 22. Sea G un grupo de Lie compacto y conexo, T un toro maximal de G y $N(T) = \{g \in G : gTg^{-1} = T\}$ el normalizador de T en G. Entonces el grupo

$$W := N(T)/T$$

es llamado el grupo de Weyl de G.

Notemos que el normalizador de T, $N(T)$, actúa en T por conjugación

$$\begin{aligned} N \times T &\to T \\ (n,t) &\mapsto ntn^{-1} \end{aligned}$$

y como la acción de T en T es trivial, tenemos que la anterior operación induce una acción del grupo de Weyl de G en T

$$\begin{aligned} W \times T &\to T \\ (w,t) &\mapsto wt^{-1} \end{aligned}$$

3.1. Propiedades de los espacios de representaciones

Teorema 3.1. *Sea G un grupo de Lie tal que todo subgrupo abeliano de G está contenido en un subgrupo abeliano arco-conexo, entonces el espacio $Hom(\mathbb{Z}^n, G)$ es arco-conexo.*

Demostración. Sea $e_1, ..., e_n$ la base estandar de $\mathbb{Z}^n$. Dado cualquier $f \in Hom(\mathbb{Z}^n, G)$, sean $x_1 = f(e_1)$,..., $x_n = f(e_n)$ las imágenes de estos generadores. Como estos elementos conmutan entre sí, entonces están contenidos en un subgrupo abeliano arco-conexo $\mathbb{T} \subset G$. Para cada $i = 1, ..., n$ elijamos un camino $p_i : [0, 1] \to \mathbb{T} \subset G$ tal que $p_i(0) = 1_G$ y $p_i(1) = x_i$.

Definamos $H : [0, 1] \to Hom(\mathbb{Z}^n, G)$ como

$$H(t)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t)^{a_i}.$$

Claramente H es una función continua. Además $H(0)$ es el homomorfismo trivial y $H(1) = f$, es decir, H es una homotopía entre el homomorfismo trivial y f, por lo tanto $Hom(\mathbb{Z}^n, G)$ es arco-conexo. □

Corolario 3.2. *Si G es $U(m)$, $SU(m)$ o $Sp(m)$, entonces $Hom(\mathbb{Z}^n, G)$ es arco-conexo.*

Demostración. Para los grupos $U(m)$, $SU(m)$ y $Sp(m)$ tenemos que los grupos abelianos maximales son precisamente los toros maximales, los cuales son arco-conexos, por lo tanto $Hom(\mathbb{Z}^n, G)$ es arco-conexo. □

Lema 3.3. *Sea G un grupo de Lie compacto y fijemos un toro maximal $T \subseteq G$. Entonces, dos elementos en T son conjugados en G si y sólo si están en la misma órbita bajo la acción del grupo de Weyl.*

Demostración. Sean $x, y \in T$ y $g \in G$ tales que $gxg^{-1} = y$. Si $Z(x)$ y $Z(y)$ son los centralizadores de x y y respectivamente, entonces

$$C_g : Z(x) \to Z(y)$$

es un mapeo biyectivo.

Como $T \subset Z(x)$, entonces $C_g(T) \subset Z(y)$. También tenemos que $T \subset Z(y)$, luego T y $C_g(T)$ son dos toros maximales contenidos en $Z(y)$, más aún, por ser conexos y contener ambos a 1_G, están contenidos en la componente conexa de la identidad de $Z(y)$, denotada por $Z(y)^0$, por lo tanto, existe $h \in Z(y)^0$ tal que $C_h(C_g(T)) = T$, es decir, $C_{hg}(T) = T$.

De lo anterior tenemos que $hg \in N_G(T)$, y como $h \in Z(y)^0$, entonces

$$C_{hg}(x) = C_h(C_g(x)) = C_h(y) = y.$$

Si W es el grupo de Weyl asociado a T, concluimos que $[hg] \in W$ es tal

$$[hg] \cdot x = y.$$

$\square$

Teorema 3.4. *Sea G un grupo de Lie compacto tal que $Hom(\mathbb{Z}^r, G)$ es arco-conexo para todo $1 \leq r \leq n$. Sea T un toro maximal en G y W el grupo de Weyl asociado a T. Entonces existe un homeomorfismo*

$$Rep(\mathbb{Z}^n, G) \cong T^n/W,$$

donde W actúa diagonalmente en T^n.

Demostración. Definamos

$$\begin{aligned} \varphi : G \times T^n &\longrightarrow Hom(\mathbb{Z}^n, G) \\ (g, t_1, ..., t_n) &\longmapsto (gt_1g^{-1}, ..., gt_ng^{-1}). \end{aligned}$$

φ está bien definida ya que para todo $i = 1, ..., n$, $gt_ig^{-1} \in gTg^{-1}$, el cual es un toro maximal en G, por lo tanto $(gt_1g^{-1}, ..., gt_ng^{-1})$ es una n-tupla de elementos en G que conmutan entre sí, por lo tanto $(gt_1g^{-1}, ..., gt_ng^{-1}) \in Hom(\mathbb{Z}^n, G)$. Además φ es continua, pues cada entrada lo es.

Como $Hom(\mathbb{Z}^n, G)$ es arco-conexo, entonces una n-tupla de elementos en G que sea conmutativa está contenida en un toro maximal [Bai07], y como todos los toros maximales de un grupo de Lie son conjugados entre si, se sigue que φ es sobreyectiva.

Ahora, consideremos la acción de $N_G(T)$ en $G \times T^n$ dada por

$$h \cdot (g, t_1, ..., t_n) := (gh^{-1}, ht_1h^{-1}, ..., ht_n, h^{-1}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \varphi(h \cdot (g, t_1, ..., t_n)) &= \varphi(gh^{-1}, ht_1h^{-1}, ..., ht_n, h^{-1}) \\ &= (gh^{-1}ht_1h^{-1}(hg^{-1}), ..., gh^{-1}ht_nh^{-1}(hg^{-1})) \\ &= (gt_1g^{-1}, ..., gt_ng^{-1}) \\ &= \varphi(g, t_1, ..., t_n), \end{aligned}$$

es decir, φ es $N_G(T)$-invariante, por lo tanto induce un mapeo en el cociente

$$\overline{\varphi} : G \times_{N_G(T)} T^n \longrightarrow Hom(\mathbb{Z}^n, G).$$

Por otra parte, G actúa en $G \times_{N_G(T)} T^n$ por multiplicación a la izquierda en el factor de G, es decir, si $h \in G$ y $[g, t_1, ..., t_n] \in G \times_{N_G(T)} T^n$, entonces

$$h \cdot [g, t_1, ..., t_n] = [hg, t_1, ..., t_n].$$

Además, si denotamos por C_h la acción de conjugación por h en $Hom(\mathbb{Z}^n, G)$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(h \cdot [g, t_1, ..., t_n]) &= \overline{\varphi}([hg, t_1, ..., t_n]) \\ &= \big((hg)t_1(hg)^{-1}, ..., (hg)t_n(hg)^{-1}\big) \\ &= C_h((gt_1g^{-1}, ..., gt_ng^{-1})) \\ &= C_h(\overline{\varphi}([g, t_1, ..., t_n])),\end{aligned}$$

es decir, $\overline{\varphi}$ es una función G-equivariante, y además $\overline{\varphi}$ induce un homeomorfismo en las fibras, es decir

$$\frac{G \times_{N_G(T)} T^n}{G} \cong Rep(\mathbb{Z}^n, G).$$

Por otra parte notemos que

$$\frac{G \times_{N_G(T)} T^n}{G} \cong \{1_G\} \times_{N_G(T)} T^n \cong T^n/N_G(T),$$

y por el lema 3.3, tenemos que

$$T^n/N_G(T) \cong T^n/W.$$

Así,

$$Rep(\mathbb{Z}^n, G) \cong T^n/W.$$

□

3.2. Productos simétricos

Definición 23. Sea X un espacio topológico. Definimos el m-ésimo producto simétrico de X como el espacio cociente

$$SP^m(X) := X^m/\Sigma_m,$$

donde el grupo simétrico Σ_m actúa en X^m permutando las entradas de cada m-tupla.

Si $m = 0$ definimos $SP^0(X)$ como un punto. En general, podemos pensar a $SP^m(X)$ como el conjunto de m-tuplas no ordenadas $[x_1, ..., x_m]$, con $x_i \in X$ para todo $i = 1, ..., m$.

Supongamos que $(X, *)$ es un espacio punteado, entonces tenemos una inclusión natural

$$\begin{aligned} i : SP^m(X) &\hookrightarrow SP^{m+1}(X) \\ [x_1, ..., x_m] &\mapsto [x_1, ..., x_m, *].\end{aligned}$$

Esto induce una sucesión

$$X = SP^1(X) \hookrightarrow SP^2(X) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow SP^m(X) \hookrightarrow \cdots$$

y $SP^\infty(X)$ es definido como el colímite de esta sucesión. Notemos que $SP^\infty(X)$ es precisamente el monoide libre abeliano generado por X.

El siguiente lema se puede demostrar directamente a partir de la definición de los productos simétricos.

Lema 3.5. *Si X y Y son espacios topológicos homotópicamente equivalentes, entonces para cada $n \geq 0$ se tiene que $SP^n(X)$ y $SP^n(Y)$ también son homotópicamente equivalentes.*

Lema 3.6. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que*

$$SP^n(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{S}^1.$$

Demostración. Sea $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y consideremos a $\mathbb{S}^1$ como el conjunto de número complejos de norma 1. Como $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ es un retracto de deformación, en particular una equivalencia homotópica, del lema 3.5 se sigue que $SP^n(\mathbb{S}^1) \simeq SP^n(\mathbb{C}^*)$, por lo tanto es suficiente considerar a $\mathbb{C}^*$.

Definamos $W := \{p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \ : \ a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C} \ \mathbf{y} \ a_0 \in \mathbb{C}^*\}$. Notemos que W es el conjunto de polinomios mónicos de grado n con raices no nulas ya que $a_0 \neq 0$.

Podemos darle a W una topología mediante la biyección

$$\begin{aligned} &W \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^* \\ &z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \mapsto (a_{n-1}, ..., a_1, a_0). \end{aligned}$$

De esta manera W es un espacio homeomorfo a $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^*$.

Por otro lado la función

$$\begin{aligned} &\varphi : SP^n(\mathbb{C}^*) \longrightarrow W \\ &[z_1, z_2, ..., z_n] \mapsto p(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

De lo anterior concluimos que

$$SP^n(\mathbb{S}^1) \simeq SP^n(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^* \simeq \mathbb{S}^1.$$

□

3.3. Ejemplos

Lema 3.7. *Existen homemomorfismos*

$$Rep(\mathbb{Z}^n, U(m)) \cong SP^m((\mathbb{S}^1)^n)$$

y

$$Rep(\mathbb{Z}^n, Sp(m)) \cong SP^m((\mathbb{S}^1)^n/\mathbb{Z}/2).$$

Demostración. Del teorema 3.4 tenemos que para estos grupos, el espacio de representaciones, $Rep(\mathbb{Z}^n, G) \cong T^n/W$, donde T es un toro maximal en G y W es el grupo de Weyl asociado a ese toro maximal.

Para $U(m)$ elijamos el toro maximal $T = \Delta(U(m)) \cong (\mathbb{S}^1)^m$ y $W = \Sigma_m$ el grupo de Weyl asociado, que actúa en T permutando las entradas de $(\mathbb{S}^1)^m$, y en T^n diagonalmente ([BD13], p. 169)

Sea $[D_1, ..., D_m] \in T^n/\Sigma_m \cong Rep(\mathbb{Z}^n, U(m))$, con $D_i = (x_1^i, ..., x_m^i)$ para $i = 1, ..., n$. Si $\sigma \in \Sigma_m$, entonces

$$\sigma \cdot D_i = (x^i_{\sigma(1)}, ..., x^i_{\sigma(m)})$$

y

$$\sigma \cdot (D_1, ..., D_n) = (\sigma \cdot D_1, ..., \sigma \cdot D_n).$$

Luego

$$\begin{aligned}(D_1, ..., D_n) &= \big((x_1^1, ..., x_m^1), ..., (x_1^n, ..., x_m^n)\big)\\ &\cong \big((x_1^1, x_1^2, ..., x_1^n), ..., (x_m^1, x_m^2, ..., x_m^n)\big)\\ &= (X_1, ..., X_m),\end{aligned}$$

donde $X_i = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^n) \in (\mathbb{S}^1)^n$.

Notemos que $\sigma \cdot (X_1, ..., X_m) = (X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(m)})$, de donde

$$T^n/W \cong ((\mathbb{S}^1)^n)^m/\Sigma_m := SP^m((\mathbb{S}^1)^n).$$

Por lo tanto,

$$Rep(\mathbb{Z}^n, U(m)) \cong SP^m(\mathbb{S}^n).$$

Ahora, para $Sp(m)$ elijamos el toro maximal $T = \Delta(Sp(m)) \cong (\mathbb{S}^1)^m$ y su respectivo grupo de Weyl $W = \Sigma_m \ltimes (\mathbb{Z}/2)^m$.

En este caso, si $D = (x_1, ..., x_m) \in T$, entonces la acción de Σ_m es la descrita anteriormente, y si $\tau = (\tau_1, ..., \tau_m) \in (\mathbb{Z}/2)^m$, luego

$$\tau \cdot D = (\tau_1 x_1, ..., \tau_m x_m).$$

Acá la acción de $\mathbb{Z}/2$ en $\mathbb{S}^1$ está dada por conjugación compleja.

Entonces, dada $[D_1, .., D_n] \in Rep(\mathbb{Z}^n, Sp(m))$, tenemos que

$$\begin{aligned}(D_1, ..., D_n) &= \left((x_1^1, ..., x_m^1), ..., (x_1^n, ..., x_m^n)\right) \\ &\cong \left((x_1^1, x_1^2, ..., x_1^n), ..., (x_m^1, x_m^2, ..., x_m^n)\right) \\ &= (X_1, ..., X_m).\end{aligned}$$

La acción de τ en $(X_1, ..., X_m)$ está dada por

$$\begin{aligned}\tau \cdot (X_1, ..., X_m) &= (\tau_1 X_1, ..., \tau_m X_m) \\ &= \left((\tau_1 x_1^1, \tau_1 x_1^2, ..., \tau_1 x_1^n), ..., (\tau_m x_m^1, \tau_m x_m^2, ..., \tau_m x_m^n)\right).\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$T^n/W \cong SP^m((\mathbb{S}^1)^n/\mathbb{Z}/2).$$

Por lo tanto

$$Rep(\mathbb{Z}^n, Sp(m)) \cong SP^m((\mathbb{S}^1)^n/\mathbb{Z}/2).$$

$\square$

Ejemplo 3.8. $\mathcal{M}(\mathbb{S}^1, U(m)) \simeq \mathbb{S}^1$.

Del lema 3.7, tenemos que $Rep(\mathbb{Z}, U(m)) \cong SP^m(\mathbb{S}^1)$*, por lo tanto, utilizando el lema 3.6 se tiene que*

$$\mathcal{M}(\mathbb{S}^1, U(m)) \cong Rep(\mathbb{Z}, U(m)) \simeq \mathbb{S}^1.$$

Teorema 3.9. *Sea M una variedad suave, compacta y arco-conexa tal que su grupo fundamental, $H := \pi_1(M)$, es abeliano, entonces si G es igual a $U(m)$ ó $Sp(m)$, tenemos que $\mathcal{M}(M, G)$ tiene $\binom{R+m-1}{m}$ componentes arco-conexas y además tenemos homeomorfismos*

$$\mathcal{M}(M, U(m)) \cong \bigsqcup \left(SP^{k_1}((\mathbb{S}^1)^{r_0}) \times \cdots \times SP^{k_l}((\mathbb{S}^1)^{r_0})\right)$$

y

$$\mathcal{M}(M, Sp(m)) \cong \bigsqcup \left(SP^{k_1}((\mathbb{S}^1)^{r_0}/\mathbb{Z}/2) \times \cdots \times SP^{k_l}((\mathbb{S}^1)^{r_0}/\mathbb{Z}/2)\right),$$

donde R y r_0 son la cardinalidad de la parte con torsión y el rango de H respectivamente y $k_1, ..., k_l$ varía sobre todas las particiones de m, es decir, son enteros positivos tales que $k_1 + \cdots k_l = m$.

Demostración. Para esta prueba recordemos que $Rep(H,G) \cong \mathcal{M}(M,G)$.

Como M es una variedad compacta, entonces H es un grupo abeliano finitamente generado, por lo tanto

$$H \cong \mathbb{Z}^{r_0} \times \mathbb{Z}/r_1 \times \cdots \times \mathbb{Z}/r_j,$$

con $r_1, ..., r_j$ enteros positivos y r_0 un entero no negativo.

En este caso, H tiene $N := r_0 + j$ generadores, por lo tanto existe un homorfismo de grupos sobreyectivo

$$\varphi : \mathbb{Z}^N \to H.$$

El homomorfismo φ induce las siguientes inclusiones naturales:

$$i : Rep(H, U(m)) \hookrightarrow Rep(\mathbb{Z}^N, U(m)) \cong SP^m((\mathbb{S}^1)^N)$$

y

$$j : Rep(H, Sp(m)) \hookrightarrow Rep(\mathbb{Z}^N, Sp(m)) \cong SP^m((\mathbb{S}^1)^N/\mathbb{Z}/2).$$

Veamos primero el caso de $U(m)$.

De la anterior inclusión, podemos identificar a $Rep(H, U(m))$ con las tuplas en $SP^m((\mathbb{S}^1)^N)$ de la forma

$$\left((x_1^1, x_1^2, ..., x_1^{r_0}, y_1^1, ..., y_1^j), ..., (x_m^1, x_m^2, ..., x_m^{r_0}, y_m^1, ..., y_m^j)\right) = \left((\overline{X}_1, \overline{Y_1}), ..., (\overline{X}_m, \overline{Y_m})\right).$$

Donde $x_i^k \in \mathbb{S}^1$, $(y_t^l)^{r_l} = 1$, $\overline{X} \in (\mathbb{S}^1)^{r_0}$ y si definimos R_p como el conjunto de las p-ésimas raices de la unidad, entonces $\overline{Y} \in R_{r_1} \times \cdots \times R_{r_j}$.

Sea $S := R_{r_1} \times \cdots \times R_{r_j}$, entonces S es un conjunto finito con $R := \prod_{i=1}^{j} r_i$ elementos, entonces $S = \{Y_1, ..., Y_R\}$.

Notemos que una componente arco-conexa está determinada por los diferentes elementos $Y_j \in S$ y la cantidad que cada uno de estos se repita en las tuplas. Entonces consideremos una componente arco-conexa arbitraria dada por

$$\left((\overline{X}_1^1, Y_{i_1}), ..., (\overline{X}_{k_1}^1, Y_{i_1}), ..., (\overline{X}_1^l, Y_{i_l}), ..., (\overline{X}_{k_l}^l, Y_{i_l})\right) \subset SP^m((\mathbb{S}^1)^N),$$

donde $k_1 + \cdots + k_l = m$ y como las parejas $(\overline{X}_k^j, Y_{i_j})$ se pueden intercambiar sin cambiar la componente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que los índice i_j aparecen de forma creciente.

Entonces una tupla de esta componente arco-conexa está formada por las sub-tuplas de parejas que tienen el mismo elemento Y_{i_j}, es decir, las que son de la forma

$$\left((\overline{X}_1^j, Y_{i_j}), ..., (\overline{X}_s^j, Y_{i_j}), ..., (\overline{X}_t^j, Y_{i_j}) ..., (\overline{X}_{k_j}^j, Y_{i_j})\right).$$

Notemos que si en una sub-tupla de estas intercambiamos los elementos $\overline{X}_s^j \in \mathbb{S}^{r_0}$ y $\overline{X}_t^j \in \mathbb{S}^{r_0}$ de la siguiente manera:

$$\left((\overline{X}_1^j, Y_{i_j}), ..., (\overline{X}_t^j, Y_{i_j}), ..., (\overline{X}_s^j, Y_{i_j}) ..., (\overline{X}_{k_j}^j, Y_{i_j})\right),$$

como en la tupla inicial siempre podemos intercambiar las parejas $(\overline{X}_k^j, Y_{i_j})$ sin que esto cambie la clase de la tupla, entonces podemos reordenar para obtener la misma sub-tupla con la que iniciamos, por lo tanto, esta componente es homeomorfa a $SP^{k_j}((\mathbb{S}^1)^{r_0})$.

De lo anterior se sigue que esta componente arco-conexa es homeomorfa a

$$SP^{k_1}((\mathbb{S}^1)^{r_0}) \times \cdots \times SP^{k_l}((\mathbb{S}^1)^{r_0}).$$

Por lo tanto, para determinar a qué componente arco-conexa de $Rep(H, U(m))$ pertenece un elemento, basta saber cuáles elementos de S están en la tupla que lo representa y cuantas veces se repite cada uno de estos.

Ahora, para saber el número de componentes arco-conexas que tiene este espacio, tenemos que contar cuántas m-tuplas de elementos de S con repetición existen, y este número está dado por $\binom{R+m-1}{m}$.

De lo anterior, tenemos que $Rep(H, U(m))$ es la unión disjunta de $\binom{R+m-1}{m}$ productos cartesianos de productos simétricos de $(\mathbb{S}^1)^{r_0}$, es decir,

$$Rep(H, U(m)) \cong \bigsqcup \left(SP^{k_1}((\mathbb{S}^1)^{r_0}) \times \cdots \times SP^{k_l}((\mathbb{S}^1)^{r_0})\right).$$

Ahora, de manera similar a como se hizo con $Rep(H, U(m))$, $Rep(H, Sp(m))$ se puede identificar con las tuplas de la forma

$$\left((\overline{W}_1, \overline{Y_{i_1}}), ..., (\overline{W}_m, \overline{Y_{i_m}})\right) \subset SP^m((\mathbb{S}^1)^N/\mathbb{Z}/2),$$

donde $\overline{Y}_{i_j} \in S$ y $W_j \in (\mathbb{S}^1)^N/\mathbb{Z}/2$.

Nuevamente, las componentes arco-conexas de este espacio están determinadas por diferentes elementos Y_{i_j} y las veces que se repitan en una tupla, por lo tanto, el número de componentes arco-conexas de este espacio es $\binom{R+m-1}{m}$ y son de la forma

$$\left((\overline{W}_1^1, Y_{i_1}), ..., (\overline{W}_{k_1}^1, Y_{i_1}), ..., (\overline{W}_1^l, Y_{i_l}), ..., (\overline{W}_{k_l}^l, Y_{i_l})\right) \subset SP^m((\mathbb{S}^1)^N/\mathbb{Z}/2),$$

donde $k_1, ..., k_l$ varían sobre todas las particiones de m, $1 \leq l \leq m$, $\overline{W}_t^j \in (\mathbb{S}^1)^N/\mathbb{Z}/2$ y $Y_{i_j} \in S$.

De esta manera, si intercambiamos cualquier par de elementos $\overline{W}_t^j$ con el mismo súper índice j en la tupla, no cambiamos la clase de la tupla en $SP^m((\mathbb{S}^1)^N/\mathbb{Z}/2)$, por lo tanto, esta componente arco-conexa es homeomorfa a

$$SP^{k_1}((\mathbb{S}^1)^{r_0}/\mathbb{Z}/2) \times \cdots \times SP^{k_l}((\mathbb{S}^1)^{r_0}/\mathbb{Z}/2).$$

De lo anterior,

$$Rep(H, Sp(m)) \cong \bigsqcup \left(SP^{k_1}((\mathbb{S}^1)^{r_0}/\mathbb{Z}/2) \times \cdots \times SP^{k_l}((\mathbb{S}^1)^{r_0}/\mathbb{Z}/2) \right).$$

□

Notemos que las componentes arco-conexas en el teorema anterior están determinadas en parte por las particiones de m, y dado que no se conoce una fórmula explícita para hallar el número de particiones de un número, cada caso se tendrá que analizar de manera individual.

Sin embargo, si en el teorema anterior consideramos el caso particular de que H tenga rango $r_0 = 1$, con un poco más de esfuerzo podremos describir explícitamente una equivalencia homotópica de esos espacios moduli.

Teorema 3.10. *Supongamos que M es una variedad suave como en el teorema anterior, y que además su grupo fundamental H tiene rango $r_0 = 1$, entonces existen equivalencias homotópicas*

$$Rep(H, U(m)) \cong \mathcal{M}(M, U(m)) \simeq \bigsqcup_{l=1}^{m} \left(\bigsqcup_{i=1}^{P_l} (\mathbb{S}^1)^l \right)$$

y

$$Rep(H, Sp(m)) \cong \mathcal{M}(M, Sp(m)) \simeq \bigsqcup_{l=1}^{m} \left(\bigsqcup_{i=1}^{P_l} * \right),$$

donde $l \in \{1, 2, ..., m\}$ y $P_l := \binom{R}{l}\binom{m-1}{m-l}$.

Demostración. Sea H como en el teorema anterior, pero en este caso $r_0 = 1$, entonces

$$Rep(H, U(m)) \cong \bigsqcup \left(SP^{k_1}(\mathbb{S}^1) \times \cdots \times SP^{k_l}(\mathbb{S}^1) \right).$$

Del lema 3.6 se sigue que

$$Rep(H, U(m)) \simeq \bigsqcup \left(\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1 \right).$$

De lo anterior se sigue entonces que las componentes arco-conexas de $Rep(H, U(m))$ son productos de círculos, y la cantidad de círculos es igual a la cantidad de elementos de S que tengan los elementos de dicha cada componente.

Para ser más explícitos, podemos contar la cantidad de componentes arco-conexas compuestas por un producto cartesiano de l círculos, para cada $1 \leq l \leq m$.

Notemos que tenemos m posiciones para acomodar l diferentes elementos de S, y sin pérdida de generalidad, por ser productos simétricos, podemos suponer que los l elementos de S aparecen con subíndices en forma creciente. Por lo tanto, dados l elementos fijos de S, para contar las posibles m-tuplas que podemos formar con estos elementos, contemos la cantidad de funciones sobreyectivas y crecientes que hay del conjunto $\{1, 2, ..., m\}$ al conjunto $\{1, 2, ..., l\}$.

Notemos que el 1 siempre tiene que ser mapeado al 1, y además siempre nos quedan $(m-l)$ números que repiten la imagen del anterior, entonces este número está dado por $\binom{m-1}{m-l}$.

Por otra parte, como tenemos R elementos en S, entonces para cada $1 \leq l \leq m$ tenemos $\binom{R}{l}$ maneras de escoger los l elementos, así, la cantidad de componentes arco-conexas que son idénticas al producto de l círculos es $\binom{R}{l}\binom{m-1}{m-l}$.

De lo anterior, si denotamos $P_l := \binom{R}{l}\binom{m-1}{m-l}$, tenemos que en este caso

$$Rep(H, U(m)) \simeq \bigsqcup_{l=1}^{m} \left(\bigsqcup_{i=1}^{P_l} (\mathbb{S}^1)^l \right).$$

Ahora, para el caso de $Rep(H, Sp(m))$, como $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}/2 \simeq [0,1] \simeq *$, entonces, del teorema 3.9 tenemos que

$$Rep(H, Sp(m)) \simeq \bigsqcup * \times \cdots \times * \cong \bigsqcup *$$

Por lo tanto, lo único que nos resta determinar es el número de puntos disjuntos que conforman este espacio.

Notemos que como el número de componentes arco-conexas del caso anterior sólo dependía de los elementos del conjunto S, entonces mediante un razonamiento completamente análogo al anterior, podemos concluir que

$$Rep(H, Sp(m)) \simeq \bigsqcup_{l=1}^{m} \left(\bigsqcup_{i=1}^{P_l} * \right).$$

$\square$

Los teoremas 3.9 y 3.10 son la nuevas contribuciones de este trabajo.

Bibliografía

[Bai07] Thomas John Baird. Cohomology of the space of commuting n–tuples in a compact lie group. *Algebr. Geom. Topol.*, 7(2):737–754, 2007.

[BD13] T. Bröcker and T. Dieck. *Representations of Compact Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[Bre93] Glen E. Bredon. *Topology and Geometry*. Springer Science & Business Media, June 1993.

[DF04] David Steven Dummit and Richard M. Foote. *Abstract Algebra*. Wiley, 2004.

[KN96] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Number v. 1 in A Wiley Publication in Applied Statistics. Wiley, 1996.

[Lee03] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer Science & Business Media, 2003.

[Mor67] H. R. Morton. Symmetric products of the circle. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 63(2):349–352, 1967.

[War13] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer Science & Business Media, November 2013.